INSTITUTO FEDERAL SUL-RIO-GRANDENSE
CAMPUS PELOTAS - VISCONDE DA GRAÇA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS NA EDUCAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS NA EDUCAÇÃO

ALMIRO RODOLFO KMENTT VIANA

Uma abordagem histórico-epistemológica para a introdução do conceito de logaritmo a partir da percepção de professoras de Matemática do Ensino Médio

Pelotas - RS
Abril/2024

ALMIRO RODOLFO KMENTT VIANA

Uma abordagem histórico-epistemológica para a introdução do conceito de logaritmo a partir da percepção de professoras de Matemática do Ensino Médio

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciências e Tecnologias na Educação do Câmpus Pelotas - Visconde da Graça do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Sul-rio-grandense, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Ciências e Tecnologias na Educação.

INSTITUTO FEDERAL SUL-RIO-GRANDENSE
CAMPUS PELOTAS - VISCONDE DA GRAÇA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS NA EDUCAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS NA EDUCAÇÃO

ALMIRO RODOLFO KMENTT VIANA

Uma abordagem histórico-epistemológica para a introdução do conceito de logaritmo a partir da percepção de professoras de Matemática do Ensino Médio

Dissertação de Mestrado defendida e aprovada em: 08 / 03 / 2024.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Vinicius Carvalho Beck
Orientador – CaVG/IFSul

Profª. Drª. Angelita Hentges
CaVG/IFSul

Prof. Dr. Alberto D’Ávila Coelho
IFSul

Profª. Drª. Denise Nascimento Silveira
UFPel

Profª. Drª. Juliana Batista Pereira dos Santos
SEDUC/RS

Ficha catalográfica elaborada automaticamente com os dados fornecidos
pelo(a) autor(a) através do Módulo de Biblioteca do
Sistema GURI (Gestão Unificada de Recursos Institucionais).

V614a Viana, Almiro Rodolfo Kmentt
Uma abordagem histórico-epistemológica para a introdução do conceito de logaritmo a partir da percepção de professoras de Matemática do Ensino Médio/ Almiro Rodolfo Kmentt Viana. – 2024.
162 f. : il.

Dissertação (Mestrado) – Instituto Federal Sul-Rio-Grandense, Câmpus Pelotas Visconde da Graça, Programa de Pós - graduação em Ciências e Tecnologias da Educação, 2024.
Orientador: Prof. Dr. Vinicius Carvalho Beck.

1. Tecnologias na educação. 2. Matemática. 3. História da matemática. 4. Ensino de logaritmos. I. Beck, Vinicius Carvalho (ori.). II. Título.

CDU: 378.046-021.68:51

Catalogação na fonte elaborada pelo Bibliotecário
Vitor Gonçalves Dias CRB 10/1938
Câmpus Pelotas Visconde da Graça

DEDICATÓRIA

À minha avó Conceição Neves Kmentt, à minha mãe Sonia Regina Neves Kmentt e às minhas filhas Marianna Classen Viana e Beatriz Classen Viana.

AGRADECIMENTOS

Ao criador, pelas infinitas bençãos que recebo todos os dias.

Ao Câmpus CaVG do Instituto Federal Sul-rio-grandense, pela constante preocupação com a saúde e o bem estar de todos quantos fazem parte dessa família.

Ao meu orientador prof. Dr. Vinicius Carvalho Beck, pelo incentivo, pela empatia, pelo exemplo ético e acima de tudo pela amizade.

À banca examinadora desta pesquisa: profª. Drª. Angelita Hentges, prof. Dr. Alberto D'Ávila Coelho, profª. Drª. Denise Nascimento Silveira e profª. Drª. Juliana Batista Pereira dos Santos, pelas suas significativas e afetuosas contribuições.

Um agradecimento especial à profª. Drª. Angelita Hentges, ao prof. Dr. Antônio Maurício Medeiros Alves e ao prof. Dr. Alberto D'Ávila Coelho pela singular participação de cada um na banca de qualificação desta pesquisa.

Aos docentes e colegas do Mestrado Profissional do Programa de Pós-Graduação em Ciências e Tecnologias na Educação.

À todos os colegas do IFSul – CaVG, em especial à área da Matemática.

Às docentes participantes desta pesquisa, pela dedicação, pela generosidade e pela postura ética.

À Instituição na qual laboram as docentes participantes deste estudo, que generosamente consentiu a realização da pesquisa.

Aos estudantes que participaram da aplicação do produto educacional da pesquisa.

À todos(as) os(as) docentes da Especialização em Ciências e Tecnologias na Educação, cursada por mim anteriormente ao Mestrado.

Ao prof. Lino de Jesus Soares, pela simplicidade e generosidade do acolhimento durante a pesquisa da Especialização, que abriu caminho para essa nova jornada.

Ao prof. Me. Carlos Jorge Ribeiro, colega da Especialização e amigo desde então.

Um agradecimento especial ao prof. Dr. Marcos André Betemps Vaz da Silva, pela amizade e auxílio para realizar minha inscrição na seleção deste Mestrado, efetuada alguns poucos minutos antes de encerrar o período.

Ao prof. Elton Machado da Fonseca, um cumpadre e estimado irmão.

Aos meus familiares, em especial à minha tia Elisa Neves Kmentt, pelo carinho de despertar meu interesse pelos estudos.

EPÍGRAFE

"O amor nos põe à disposição o mais frutífero e abençoado dos terrenos para o crescimento interior. Esse "solo fecundo", quando fertilizado pelo afeto real, nos faz abrir mão da ilusão de possuir toda a verdade, eliminando, em consequência, nossas síndromes de inflexibilidade".

Hammed

RESUMO

Esta pesquisa teve como objetivo geral analisar como um enfoque histórico-cultural pode colaborar na compreensão do conceito de logaritmo no Ensino Médio. Trata-se de uma pesquisa-ação que contou com duas docentes como pesquisadoras participantes e foi organizada em quatro fases: planejamento, ação, reflexão e replanejamento. Os procedimentos de coleta foram a gravação e transcrição de diálogos e relatos, bem como o envio de relatos. Após obtidos os resultados concluiu-se que tal contextualização deve tentar trazer um pouquinho das mesmas dificuldades gradualmente impostas historicamente para a sala de aula, fazendo com que os estudantes vislumbrem os desafios e as formas de superar esses desafios, os diferentes modos de matematizar, que deram origem ao conhecimento "pronto" que temos hoje. Este trabalho complementa resultados que aparecem na literatura tanto sobre a interface entre História da Matemática e ensino da Matemática, quanto sobre a articulação entre Etnomatemática e Historiografia da Matemática aplicadas ao ensino de logaritmos.

Palavras-chave: ensino de logaritmos; Etnomatemática; História da Matemática.

ABSTRACT

This research had the general aim of analyzing how a historical-cultural approach can contribute to understanding the concept of logarithm in high school. This is an action-research that had two teachers as participating researchers and was organized into four phases: planning, action, reflection and replanning. The collection procedures were the recording and transcription of dialogues and reports, as well as sending reports. After obtaining the results, it was concluded that such contextualization should try to bring a little of the same difficulties gradually imposed historically to the classroom, making students see the challenges and ways of overcoming these challenges, the different ways of mathematizing, which gave rise to the "ready-made" knowledge we have today. This dissertation complements results that appear in the literature both on the interface between the History of Mathematics and the teaching of Mathematics, and on the articulation between Ethnomathematics and the Historiography of Mathematics applied to the teaching of logarithms.

Keywords: teaching logarithms; Ethnomathematics; History of Mathematics

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CEM – Centro de Estudos Matemáticos

ZDP – Zona de desenvolvimento proximal

SNHM – Seminário Nacional de História da Matemática

CREPHIMat – Centro Brasileiro de Referência em Pesquisa sobre História da Matemática

HEEMa – Grupo de Estudos e Pesquisas em História e Epistemologia na Educação Matemática

TCLE – termo de consentimento livre e esclarecido

P.A. – Progressão aritmética

P.G. – Progressão geométrica

PAVE – Programa de avaliação da vida escolar

ENEM – Exame Nacional do Ensino Médio

PROERD – Programa Nacional de Resistência às Drogas e à Violência

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Esta pesquisa, que investigou uma alternativa para a prática introdutória ao ensino dos logaritmos, tem suas raízes há mais ou menos 25 anos, quando durante o período de formação universitária tive contato com o professor Lino de Jesus Soares, cuja didática, em quaisquer das disciplinas lecionadas, criava sempre uma atmosfera favorável ao aprendizado através da História da Matemática, tendo ministrado, inclusive, durante esse período universitário, palestras mensais sobre o assunto. Assim, adquiri certo entusiasmo com o enfoque e passei a realizar algumas leituras sobre o tema, buscando aproveitá-las na prática docente, que já experenciava na época em cursos pré-vestibulares em Pelotas, Rio Grande, Bagé e Porto Alegre.

Após ingressar no serviço público em 2006, pelo Colégio Militar de Porto Alegre, tomei contato com a disciplina de Desenho Geométrico, ministrada no 8º ano do Ensino Fundamental, oportunidade na qual me aventurei a elaborar alguns textos sobre a História da Geometria a fim de aproximar os alunos intuitivamente das atividades desenvolvidas. Em 2013, chegando ao Instituto Federal Sul-rio-grandense (Câmpus Pelotas – Visconde da Graça), cada turma de Ensino Médio com a qual tive contato surpreendeu-me com certa independência e uma forma peculiar de aprender determinados conteúdos. Fez-se necessário então um aperfeiçoamento teórico, o que se iniciou a partir de 2019 por intermédio da Especialização em Ciências e Tecnologias na Educação, cursada no próprio Instituto Federal.

Durante a Especialização, houve a oportunidade de direcionar minha pesquisa para História da Matemática, tendo como foco acontecimentos locais relacionados ao seu ensino. Investigamos em Viana (2021) o surgimento do Centro de Estudos Matemáticos (CEM) em Pelotas-RS na década de 1950. O CEM foi idealizado pelo professor Lino de Jesus Soares e desenvolvido com o auxílio de seus pares, um grupo de jovens professores em busca de atualização num período em que não havia universidade no município. Essa congregação, segundo as conclusões da averiguação realizada, teve significativa influência em Pelotas e região no breve curso de sua existência, entre o final de 1955 e início de 1959. A pesquisa evidenciou que um dos fatores desencadeadores do surgimento do CEM foi o entusiasmo dos professores com a História da Matemática durante encontros nas escolas onde lecionavam. Tal era a motivação com o tema que o mesmo se fez presente mais de uma vez nas conferências promovidas pelo CEM e, inclusive, em sua inauguração (Viana, 2021).

A constatação renovada do potencial da História da Matemática levou-me a continuar pesquisando nesta área, porém direcionando a investigação mais diretamente para o ensino. Ao longo da realização do Mestrado Profisisonal em Ciências e Tecnologias na Educação, no qual ingressei em 2021, decidi nortear as atividades adotando como demanda minha própria experiência profissional, que evidenciava observações bastante comuns no ensino dos logaritmos, na esperança de que o trabalho a ser desenvolvido pudesse ser útil não apenas aos colegas, como no caso da primeira pesquisa, mas igualmente aos estudantes.

Ao ensinar Matemática, muitas vezes nós professores nos deparamos com conteúdos para os quais apenas a lógica intrínseca e formal da Matemática não é suficiente para um bom processo de ensino-aprendizagem. No estudo dos logaritmos, por exemplo, as propriedades e a própria função nem sempre parecem espontâneas aos alunos. Assim, não raro, alguns alunos operam mecanicamente com as propriedades sem que detenham uma compreensão mais natural do seu significado, ocorrendo o mesmo no que se refere à função logarítmica.

Vulnerabilidade adicional envolvida nesta questão vincula-se à simbologia, que embora tenha por objetivo comunicar o conceito com clareza, simplicidade e precisão, eventualmente, pode revelar-se uma sobrecarga, comprometendo a boa compreensão do conteúdo e podendo ocasionar, inclusive, certa aversão pela Álgebra, especialmente se a fase introdutória, de conceituação dos logaritmos, não for bem encaminhada. É fundamental que o estudante perceba – pela própria experiência – que a notação favorece o raciocínio (Polya, 2006).

Daí decorre a necessidade de uma introdução bem mais intuitiva do conceito, ampliando a compreensão do estudante sobre a História da Matemática e sua habilidade interpretativa, familiarizando-o assim de modo mais gradual com a simbologia e aproximando-o intuitivamente do significado das propriedades operatórias, antes mesmo de chegar à formalização do conceito de logaritmo através da definição.

Assim, conjecturamos que, possivelmente, o estudante contará com maiores subsídios para as etapas mais abstratas do estudo do tema se tomar contato com aspectos históricos que deram sentido ao assunto, pois a História da Matemática quando adequadamente inserida em sala de aula, oportuniza certas reflexões que, se bem exploradas, podem cooperar tanto para realçar conceitos e procedimentos, favorecendo a compreensão dos mesmos, quanto para motivar aqueles estudantes que carecem de explicações mais amplas sobre os significados do que estão aprendendo.

Partimos então do seguinte problema de pesquisa: A partir da percepção de professoras de Matemática do Ensino Médio de uma escola do interior do Rio Grande do Sul, de que modo uma contextualização histórico-cultural poderia favorecer a introdução didática da ideia de logaritmo?

O objetivo geral da pesquisa foi analisar como um enfoque histórico-cultural pode colaborar na compreensão do conceito de logaritmo no Ensino Médio, tendo por objetivos específicos: 1) suscitar a abordagem da História da Matemática como metodologia; 2) examinar possíveis contribuições da Etnomatemática como introdução ao estudo dos logaritmos; 3) descrever a percepção das professoras participantes sobre a relevância da proposta e do Texto de Apoio produzido.

No próximo capítulo apresentamos a Revisão de Literatura. No capítulo três, que entendemos ser um complemento da Revisão de Literatura, apresentamos trabalhos que abordam a História da Matemática como metodologia de ensino. O quarto capítulo apresenta os Referenciais Teóricos desta dissertação e o quinto explica, de modo gradual, sua Metodologia, bem como os procedimentos metodológicos adotados. No sexto capítulo são apresentados os resultados da pesquisa e a discussão referente aos resultados. Por fim, o capítulo sete apresenta as Considerações Finais.

2. REVISÃO DE LITERATURA

Adotou-se a revisão de literatura do tipo sistemática, cujo ponto de partida foi a escolha das bases de dados, neste caso, as plataformas Google Acadêmico (Google, 2023) e no Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES (2023), ferramentas que reúnem, de modo amplo, publicações científicas da literatura acadêmica de diferentes áreas.

Na plataforma Google Acadêmico, as buscas ocorreram no dia 01/08/2023, desconsiderando-se as citações, filtrando para buscar páginas em Língua Portuguesa e utilizando-se de restritores dos termos de busca. Incluiu-se aspas nos descritores *história da matemática* e *ensino de logaritmos*, com aspas, e acrescentou-se o conector lógico AND entre eles, chegando-se a 92 resultados. No Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES, ocorreu uma única busca no dia 13/08/2023, usando os descritores *história dos logaritmos* e *ensino de logaritmos*, sem aspas, na qual foram obtidos 81 trabalhos, dos quais 6 já haviam sido selecionados anteriormente, restando 75. Portanto, inicialmente obtivemos 167 estudos para iniciar as triagens em busca do corpo de análise.

Assim, uma primeira triagem foi realizada através da proximidade do título e das palavras-chave de cada trabalho encontrado com o tema desta pesquisa; nesta primeira etapa, elencaram-se 34 trabalhos. Em seguida, foram lidos os resumos e alguns trechos das considerações finais, como critério para a segunda triagem; nesse estágio, separamos 23 trabalhos, a fim de examinar extratos mais significativos de seções específicas de cada um, o que permitiu a identificação do corpo de análise da pesquisa, composto por 9 trabalhos.

A seguir apresentamos um quadro-síntese com dados básicos de identificação de tais trabalhos, contendo tipo de publicação, instituição, título, autor e ano. Logo adiante passaremos a descrever as principais características das referidas obras.

Quadro 1 – Estudos da Revisão de Literatura

Tipo de publicação	Título	Autor	Ano
Dissertação	A construção do conceito de logaritmo	Galupo	2021

Artigo	Ensino de Logaritmos: um Diagnóstico da Apropriação do Conceito Discutido à Luz da Teoria Histórico-Cultural	Pereira e Resende	2021
Artigo	Ensino de Logaritmos: uma proposta que articula História da Matemática e Etnomatemática	Santos e Lara	2021
Artigo	Articulações entre a Etnomatemática e a História da Matemática:condições de possibilidade a partir de ações pedagógicas	Santos e Lara	2022
Dissertação	Conhecimentos matemáticos para o ensino mobilizados por licenciandos no estudo de tópicos da história da matemática	Mota	2023
Artigo	A inserção da régua de cálculo circular como ferramenta para o ensino de logaritmo	Alves, Silva e Pereira	2017
Artigo	Uma introdução didática aos logaritmos de Napier a partir de sua origem histórica	Oliveira Junior	2020
Tese	Cenário da produção acadêmica em história da matemática no ensino de matemática: uma análise reflexiva das teses e dissertações (1990-2010)	Angelo	2014
Artigo	Implementações da história da matemática na Educação Básica: o que nos apresentam os anais do Seminário Nacional de História da Matemática sobre essa temática?	Bergamim, Trivizoli e Passos	2022

Fonte: Autoria própria.

Os dois trabalhos apresentados a seguir abordam a aprendizagem do conceito de logaritmo no Ensino Médio. O primeiro deles investiga como os alunos elaboram o conceito de logaritmo e quais são as barreiras nesse processo, aplicando uma sequência de atividades online em uma turma do primeiro ano do Ensino Médio. O segundo trabalho diagnostica a aprendizagem do conceito de logaritmo realizada por seis alunos do 2º ano do Ensino Médio de uma escola da rede privada de Uberaba-MG. O diagnóstico objetivou identificar a Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP) dos alunos acerca do conceito, após tê-lo estudado no ano anterior.

Galupo (2021), com base na Teoria da Aprendizagem significativa e na Teoria dos Obstáculos à aprendizagem de Jean-Pierre Astolfi, identificou obstáculos psicológicos como atenção, percepção e concentração; e outros, de natureza epistemológica, relacionados à compreensão do significado de subsunçores necessários ao conceito de logaritmo: procedimentos algébricos básicos relativos às propriedades de potenciações, às equações e funções exponenciais, bem como dificuldade na interpretação de texto. A superação das adversidades, mediada pela professora, se deu por discussões sobre exemplos e exercícios adicionais, em pequenos grupos. Entretanto, em relação às atividades inicialmente propostas, a pesquisa revelou que a inclusão do enfoque histórico, por meio de questões que envolviam grandes números e tabelas a serem preenchidas – elementos similares aos que motivaram a invenção dos logaritmos –, favoreceu a formação do conceito e a superação dos obstáculos existentes anteriormente.

Pereira e Resende (2021) partiram de seis perguntas feitas a cada aluno: o que é o logartimo? Qual(is) sua(s) aplicação(ões)? Qual a sua importância? Como foi estudá-lo? Como foram as aulas? Dê exemplos. Através dos registros das respostas – escritos e orais – obtiveram indícios de um conhecimento empírico do conceito, baseado apenas em elementos externos, como fragmentos de procedimentos, de características, propriedades e da condição de existência que, isoladamente, não traduzem sua compreensão, o que permitiu a inferência de que os alunos não chegaram a apropriar-se da essência do conceito, que é percebê-lo como expoente. Outro resultado significativo foi o enfoque dado ao estudo, apenas como recurso para os processos de seleção em provas classificatórias para o ingresso no ensino superior, desprivilegiando sua cientificidade ou aplicabilidade, como também a possibilidade de desenvolvimento de capacidades psicológicas superiores. Assim, a pesquisa apontou a necessidade de outras aproximações para novas sínteses, visando à construção do conhecimento teórico.

Os dois trabalhos a seguir investigam a articulação entre Etnomatemática e História da Matemática no ensino de logaritmos, em turmas do Ensino Médio. O primeiro deles analisa os efeitos da realização de uma proposta de ensino com 64 estudantes e discute quais ações pedagógicas emergiram da intervenção que apresentou respostas abertas a um questionário fornecido aos participantes. O segundo trabalho descreve algumas ações pedagógicas que emergiram da análise de dados obtidos por questionários relativos à aplicação de sete propostas de ensino – uma das quais sobre logaritmos –, envolvendo 210 estudantes da Educação Básica, que objetivaram a articulação entre Etnomatemática e História da Matemática, com base em teorizações pós-estruturalistas.

Santos e Lara (2021) partiram de atividades que incluíram buscas na internet sobre a história do conceito logaritmo, logo após o contato com livros antigos contendo tábuas de logaritmos, o que permitiu o levantamento de hipóteses sobre a utilidade dos artefatos que foram confirmadas ou refutadas pelo confronto com o uso da calculadora. Segundo as autoras, verificou-se nos resultados que a proposta permitiu aos estudantes: a compreensão do conceito de logaritmos; aprendizagem e reflexão sobre um modo distinto do atual para calcular e matematizar; e, a reflexão sobre os efeitos da dependência dos recursos eletrônicos e digitais nos processos de ensino e de aprendizagem. As autoras concluem que é promissora a articulação entre Etnomatemática e História da Matemática na proposta de ensino de logaritmos porque, além de oportunizar condições para a aprendizagem dos conceitos estudados, proporciona o contato com aspectos da história da origem, organização e difusão dos conceitos.

Santos e Lara (2022) identificaram os efeitos de cada proposta de ensino na aprendizagem dos alunos em 17 ações pedagógicas. Contudo, a maioria das ações oportunizou mais de um efeito no grupo de alunos e, por diversas vezes, um mesmo efeito resultou como produto de diferentes ações. A categorização mais frequente, que teve efeitos na maioria das propostas, foi a seguinte: abordar um conceito mediante a resolução de problemas históricos; solicitar a realização de consultas bibliográficas sobre História da Matemática; explorar distintos modos de matematizar; fomentar o exame de livros específicos de História da Matemática; oportunizar aspectos históricos vinculados ao conceito estudado. Tais ações, concluíram as autoras, potencializam o ensino da Matemática na Educação Básica, fomentando nos alunos uma visão mais humanista frente aos jogos de linguagem presentes na Matemática Escolar.

Os próximos dois trabalhos apresentados a seguir, também articulam História da Matemática e Etnomatemática no ensino de logaritmos, porém, com licenciandos de Matemática. O primeiro deles analisa a mobilização de conhecimentos matemáticos ao longo da disciplina de Prática de Ensino de uma universidade federal do estado de Minas Gerais, cuja ementa previa uma pesquisa de estado da arte sobre trabalhos envolvendo Etnomatemática no ensino e, na etapa final, a elaboração de um plano de aula oportunizando a abordagem de tópicos da História da Matemática no ensino. O segundo trabalho discute as potencialidades e limitações da Régua de Cálculo Circular no ensino de logaritmos a partir de pesquisa realizada durante um curso de extensão envolvendo estudantes da Universidade Estadual do Ceará. No decorrer do curso foram abordadas questões metodológicas relativas: à História da Matemática; ao uso de artefatos históricos no ensino; aos logaritmos; à história das réguas de cálculo; e, no final do curso foi proposta uma atividade de construção do instrumento e uma discussão a respeito de sua utilização pedagógica.

Mota (2023) examinou o conteúdo de aulas gravadas e transcritas através de uma adaptação do modelo Conhecimentos Matemáticos para o Ensino (MKS), dividindo os conhecimentos dos professores em categorias: o conhecimento do conteúdo; o conhecimento pedagógico do conteúdo; e, o conhecimento do currículo. Na etapa final da disciplina, a de construção de um plano de ensino, os estudantes foram divididos em duplas, uma das quais abordou os logaritmos e optou por introduzir o assunto através de um vídeo sobre a necessidade histórica da invenção e sua contribuição. Os resultados encontrados sinalizaram que, ao estudarem e elaborarem atividades sobre a História da Matemática no ensino, os licenciandos mobilizaram conhecimentos em todas os domínios categorizados, especialmente relacionado ao conhecimento pedagógico do conteúdo, em virtude do enfoque da disciplina cursada e da ação proposta na pesquisa.

Alves, Silva e Pereira (2017) apresentam dados de gravação dos áudios das aulas, por registros fotográficos, questionários (inicial e final) e outros registros de atividades desenvolvidas. Tais dados revelaram que os participantes, em geral, não haviam tido contato com o uso pedagógico da História da Matemática, embora já tivessem cursado a disciplina que aborda diretamente o tema. Os dados também apontam que entre aqueles que já lecionavam, nenhum costumava abordar aspectos históricos. Entretanto, os estudantes licenciandos foram favoráveis à sua adoção no ensino, tendo vislumbrado estratégias oportunas para alcançar uma visão diferenciada sobre logaritmos, particularmente sobre suas propriedades. Entreviram uma unidade básica de problematização, pelo contraste entre a prática social da época e a prática atual; e, perceberam, ainda, um agregador de saberes: o saber matemático; o saber da aplicação prática; e, o saber da construção física, que envolve inclusive aspectos de Geometria.

O trabalho apresentado no parágrafo seguinte propõe uma ressignificação do conceito de logaritmo em todos os níveis de ensino, abordando-o também a partir da articulação entre História da Matemática e Etnomatemática. No entanto, sugere a introdução do tema através de um exemplo contendo objetos matemáticos fora do alcance do Ensino Médio, portanto, mais adequados à licenciandos, ainda que tenha disponibilizado no artigo noções de Geometria e Trigonometria Esféricas.

Oliveira Junior (2020) afirma que a abordagem histórica, de cunho prático, motiva o estudante instigando sua curiosidade sobre o caráter interdisciplinar do conceito, pois evidencia a contribuição dada pela invenção dos logaritmos à precisão e simplificação dos cálculos da Astronomia e da Trigonometria Esférica, numa época sem tecnologias digitais. Chama a atenção, ainda, para o fato de que a proposta oportuniza a ressignificação do conceito também pelo contato com as propriedades dos logaritmos antes mesmo de definí-los, o que entende ser mais intuitivo por dispensar propriedades preliminares da função exponencial presentes na definição atual, que é adotada pelos textos didáticos, invariavelmente, como ponto de partida.

As duas pesquisas apresentadas nos próximos parágrafos oportunizam uma visão global e crítica do cenário nacional sobre a interface entre História e Ensino da Matemática. A primeira delas realiza uma revisão da produção acadêmica dos programas de pós-graduação *stricto sensu* do país, de 1990 a 2010, a respeito de propostas didáticas que utilizavam a História da Matemática. A segunda pesquisa apresenta resultados investigados em seis edições recentes do Seminário Nacional de História da Matemática (2011-2021).

Angelo (2014) catalogou ao todo 14 trabalhos, dentre eles 9 dissertações e 5 teses, e examinou-os reflexivamente: em que perspectiva a História da Matemática produzida está sendo reescrita com o propósito de ensinar Matemática? Quais as conexões das propostas didáticas apresentadas, tanto com pressupostos teóricos (referenciais teóricos, as críticas desenvolvidas e os problemas educacionais apontados), quanto em relação aos seus pressupostos ontológicos (concepção de Matemática, de História da Matemática e de aprendizagem)?

Angelo (2014) defendeu a tese de que pesquisas sobre propostas didáticas relacionadas à História da Matemática que levem em consideração a coerência entre noções epistemológicas inerentes à História da Matemática e elementos ontológicos materializados nas concepções de Matemática, de História da Matemática e de aprendizagem podem originar significativa contribuição para o campo da História da Matemática no ensino. Os resultados detectaram diversas dissonâncias entre as matrizes adotadas – teórica e ontológica – e a proposta didática apresentada nas pesquisas. A maior parte das dissertações circunscreveu a História da Matemática à outro recurso de ensino, utilizando-a apenas em caráter motivacional, sem sondar sua potencialidade epistemológica. Evidenciou-se que as perspectivas teóricas mais frequentes nas dissertações relacionavam-se à princípios recapitulacionistas: à evolucionista linear; à estrutural-construtivista; e, à evolutiva descontínua. No geral, a ausência de críticas à lacunas, fatores condicionantes ou limitações nas abordagens da História da Matemática no ensino, de certa forma, revelou uma visão ainda exploratória do tema.

Bergamim, Trivizoli e Passos (2022) analisaram 422 trabalhos publicados durante as edições examinadas do Seminário Nacional de História da Matemática. Segundo os autores, apenas 16 abordavam a interface entre História e ensino da Matemática na Educação Básica, percentual equivalente a 3,79%. Ainda que o evento acolha trabalhos de outras naturezas, sua credibilidade pode atestar que tal percentual revela a incipiência das pesquisas na área. Utilizando-se da Análise de Conteúdo e adotando os 12 argumentos defendidos por Miguel (1997) para a adoção da História da Matemática em sala de aula, os autores identificaram e categorizaram nos trabalhos averiguados 6 desses argumentos:

> C1 – A história é uma fonte de motivação para o ensino e aprendizagem da matemática; C2 – A história constitui-se numa fonte de objetivos para o ensino da matemática; C5 – A história é um instrumento que possibilita a desmistificação da matemática e a desalienação de seu ensino; C9 – A história é um instrumento promotor de atitudes e valores; C11 – A história é um instrumento que pode promover a aprendizagem significativa e compreensiva da matemática; C12 – A história é um instrumento que possibilita o resgate da identidade cultural (Bergamim; Trivizoli; Passos, 2022, p.125).

O processo analítico evidenciou que há poucos trabalhos sobre a implementação da História da Matemática na Educação Básica e que as categorias C1 (A história é uma fonte de motivação para o ensino e aprendizagem da matemática) e C11 (A história é um instrumento que pode promover a aprendizagem significativa e compreensiva da matemática) são as que mais se destacaram nos resultados dos trabalhos analisados.

Em síntese, pode-se dizer que: pesquisas realizadas diretamente com estudantes do Ensino Médio indicam que a História da Matemática pode ser um recurso importante, embora a percepção do logaritmo como expoente não tenha sido observada por pesquisadores (Galupo, 2021; Pereira; Resende, 2021), sendo esta a Zona de Desenovlimento Proximal (ZDP) identificada; a articulação entre Etnomatemática e História da Matemática no ensino de logaritmos mostra-se promissora ao explorar distintos modos de matematizar e apresentar aspectos históricos relacionados ao conteúdo, proporcionando condições de aprendizagem e uma visão mais humanista da Matemática (Santos; Lara, 2021; Santos; Lara, 2022); pesquisas mostram que, embora o uso de História da Matemática não seja comumente cogitado para o ensino de logaritmos entre estudantes de licenciatura em Matemática, eles próprios concordam que esta é uma metodologia promissora e tal estratégia, nos estudos realizados, mobilizou fortemente conhecimentos pedagógicos específicos relativos à logaritmos (Mota, 2023; Alves; Silva; Pereira, 2017); há na literatura abordagens que sugerem eficácia maior no ensino quando as consequências práticas das propriedades dos logaritmos são apresentadas antes da definição formal, baseada na função exponencial (Oliveira Junior, 2020); e ainda, estudos de revisão indicam que a História da Matemática tem sido abordada mais por seu viés motivacional do que por sua potencialidade epistemológica, embora estudos mais recentes estejam considerando-a como um instrumento que pode promover a aprendizagem significativa e compreensiva da Matemática (Angelo, 2014; Bergamim; Trivizoli; Passos, 2022).

Importa ainda destacar que esta Revisão de Literatura não apenas forneceu elementos indispensáveis para a composição dos critérios de discussão dos dados da pesquisa como também norteou de modo relevante alguns dos aprimoramentos realizados no produto educacional, um texto de apoio aos professores.

3. HISTÓRIA DA MATEMÁTICA COMO METODOLOGIA DE ENSINO

Saito (2018) aborda, de modo amplo, a pesquisa histórica e filosófica na Educação Matemática e o cenário atual da interação entre História da Matemática e ensino da Matemática. Optamos aqui por uma breve abordagem, a fim de proporcionar uma familiarização gradual do leitor com o despertar da articulação entre estes dois campos de estudo.

3.1 A História da Matemática a caminho do ensino

Ao realizarem-se estudos sobre a origem e o desenvolvimento da ideia de número, nota-se que os documentos mais antigos encontrados contém, em geral, simbolismos e procedimentos bem anteriores aos próprios artefatos considerados, revelando em sua maior parte um conteúdo já altamente elaborado e, portanto, pouco trazendo sobre o alvorecer desta ideia. A fim de contornar tal constatação, os pesquisadores da História da Matemática, desde as primeiras décadas do século XX, têm contado com um importante ramo da Antropologia: a Etnografia. Ao estudar a cultura de civilizações primitivas que se desenvolveram em relativo isolamento – algumas ainda no nível da Idade da Pedra e que passaram por um rápido processo de extinção ou de modernização – têm encontrado vestígios dos estágios mais remotos do desenvolvimento da ideia de número, cujos registros, ao longo do tempo, foram sendo quase apagados por realizações posteriores (Gundlach, 1992).

Esse diálogo entre culturas distintas, promovido pela História da Matemática, atingiu também alcance inovador com os estudos de Ubiratan D'Ambrosio na área da Educação Matemática a partir da década de 1970 quando vai para a África, a convite da Unesco, trabalhar em cursos de pós-graduação de alguns países que haviam conquistado a independência. É do contato com a Matemática não formal de outras culturas que nasce seu projeto, cuja natureza era trazer para o campo da Educação Matemática discussões sobre aspectos sociais, políticos, econômicos e culturais, sendo apresentado ao mundo acadêmico pela primeira vez em 1976, no 3º Encontro Internacional de Educação Matemática na Alemanha. Em determinado momento sobre o qual não há consenso, apenas sabe-se que foi entre 1984 e 1985, surge a necessidade de sintetizar e identificar suas ideias através de um termo. Segundo Santos (2022), é em 1984 no 5º Encontro Internacional de Educação Matemática na

Austrália que D'Ambrosio cunha para tais estudos a palavra Etnomatemática. Desde então, a compreensão do que se entende por Etnomatemática vem ampliando-se, sendo utilizada e difundida em diferentes contextos, a título de exemplo influênciando importantes subáreas da Educação Matemática tais como: a resolução de problemas, a modelagem matemática e a História da Matemática.

Desse modo, desde as últimas décadas do século passado, vem se notando entre profissionais que ensinam Matemática certo empenho em valorizar a História da Matemática; observando-se como primeiros reflexos tanto o surgimento de pequenos textos em livros didáticos da educação básica quanto a incorporação da disciplina específica em cursos de licenciatura de certas faculdades e universidades. Conforme afirmam Mendes e Pires (2020, p. 412) "Um dos aspectos que contribuíram para a estruturação e consolidação dessa área foi a organização de um evento nacional ocorrido em 1995 sobre a História da Matemática". Trata-se do Seminário Nacional de História da Matemática (SNHM) que, a partir de então, acontece nos anos ímpares. Impulso decisivo aos estudos e pesquisas na área ocorreu por ocasião da terceira edição desse evento, em 1999, com a criação da Sociedade Brasileira de História da Matemática, sendo o professor Ubiratan D'Ambrosio um dos principais responsáveis pelo surgimento dessa comunidade científica.

3.2 Abordagens atuais

Leitura particularmente recomendável para quem almeja uma compreensão experiente sobre o alcance da interface entre História da Matemática e ensino da Matemática encontra-se em Soares (1998), que expõe um perfil de docência denominado "Ensino crítico da Matemática", caracterizando-o por três componentes fundamentais: o "diálogo científico", a "atitude de pesquisa" e o "papel da História da Matemática". O autor argumenta que a apresentação tradicional do conteúdo evidencia com ênfase apenas sua estrutura lógica, o que pode levar a uma equivocada inferência da "existência de um **processo** pelo qual se chegou à criação desse saber, e ao qual, apenas os **mais dotados** teriam acesso" (Soares,1998, p.24) – grifos do autor ; porém, salienta, que a História da Matemática, de igual modo, pode negar esse mito de forma eloquente.

Nos últimos anos houve um incremento na quantidade de artigos, dissertações, teses e livros sobre a articulação entre a História e o ensino de Matemática, culminando na criação de um repositório de publicações na temática em 2006 – Centro Brasileiro de Referência em Pesquisa sobre História da Matemática (CREPHIMat) – que surge em razão da produção acadêmico-científica nessa área, naquele momento, não estar chegando aos professores de Matemática tanto da Educação Básica quanto do Ensino Superior. No entanto, segundo o Grupo de Trabalho (GT) História da Matemática e Cultura, da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, o interesse de educadores matemáticos sobre as possíveis interfaces entre História e ensino da Matemática vêm crescendo. Por decorrência, certas abordagens tem conquistado o espaço de referências para quem deseja explorar possibilidades dessa interface (Feitosa; Silva, 2021).

Para Miguel e Miorim (2005), o enfoque adequado ao introduzir a interface em sala de aula é o de uma História pedagogicamente vetorizada, pois entendem que essa História é um campo de diálogo (não de respostas) no qual as atividades pedagógicas estão inseridas em práticas sociais, e estas pertencem a diferentes contextos e épocas.

Baroni, Teixeira e Nobre (2011) defendem que a História pode mostrar a necessidade do estudo de certos conceitos matemáticos, influindo na compreensão dos mesmos, e assim, como fator motivacional, promover a interdisciplinaridade, atuando na formação didático-cultural dos professores.

Mendes (2012) posiciona-se a favor da promoção de uma investigação histórica em sala de aula que, beneficiando o processo de criatividade matemática, visa um ensino a partir de problematizações revestidas de informações históricas, a fim de gerar autonomia no aluno para a construção do próprio conhecimento.

Entretanto, possíveis contribuições da História ao ensino da Matemática tem sido justificadas por historiadores, da Ciência e da Matemática, e por educadores matemáticos, basicamente, através de três argumentos:

> O primeiro diz respeito à própria área de referência dos educadores matemáticos, ou seja, a história tem ajudado a construir uma visão diferenciada da matemática, que passa a ser vista como atividade intelectual e humanizadora, ao invés de um corpo de conhecimento dado ou um conjunto de técnicas de resolução de problemas matemáticos. O segundo aspecto está relacionado à percepção do conhecimento matemático. A articulação de tópicos de história no ensino de matemática tem possibilitado a reorientação da visão do que são os objetos da Matemática, pois o estudo do processo histórico

> conduz a uma linha interpretativa diferenciada, propiciando a abordagem do mesmo objeto matemático por outra perspectiva e, assim, contribuindo para sua melhor compreensão. O terceiro aspecto a ser considerado é a interdisciplinaridade, na qual o processo histórico tem se mostrado eficaz ao abordar o desenvolvimento dos conceitos matemáticos, na medida em que os insere num contexto particular e estabelece relações com outras áreas do conhecimento científico, tecnológico e social (Saito; Dias, 2013, p.62).

Em que pese haver consenso sobre o potencial didático-pedagógico da articulação entre História e ensino da Matemática, a busca dessa interface ainda requer muitas pesquisas e reflexões, tendo em vista principalmente que os métodos e objetos de investigação destas duas áreas são bem distintos (Saito, 2018).

3.3 Um olhar historiográfico

Nesta seção examinamos algumas possibilidades de abordagens da História da Matemática tendo por base tendências historiográficas identificadas pelo Grupo de Estudos e Pesquisas em História e Epistemologia na Educação Matemática (HEEMa) da PUC-SP. Neste texto emprega-se o termo historiografia segundo um sentido específico extraído do dicionário Michaelis Online (2024), isto é: a arte de escrever a História. Em outras palavras, a História é o que de fato aconteceu ou a Ciência que busca os fatos acontecidos, enquanto a Historiografia se preocupa em interpretar e escrever uma versão da História, que pode estar mais ou menos distante da realidade histórica, e sendo de natureza mais subjetiva.

Embora as vertentes pedagógicas que se tem destacado apontem também na direção de cuidados historiográficos, os aspectos metodológicos ainda prevalecem como o foco dos educadores matemáticos. No entanto, o HEEMa tem se esforçado para fundamentar a necessidade de alinhar questões metodológicas com questões historiográficas, a fim de contribuir com a consolidação de preceitos teóricos mais consistentes para a elaboração de uma historiografia mais apropriada ao ensino.

Sem apontar “o que” ou “como” ensinar Matemática por meio da História da Matemática, Saito (2016) revela que grande parte da produção em História da Matemática divulgada em livros e outros suportes está desatualizada, tendo ainda por base a mesma perspectiva historiográfica do início do século passado, denominada “tradicional”, “presentista” ou “evolucionista”. Este é um ponto de vista que interpreta a Matemática e as Ciências Naturais como uma viajem contínua de descobertas iniciadas no passado, gerando sabedoria e entendimento crescentes, de modo autosuficiente e linear, até os dias atuais. Neste caso, usa-se a História da Matemática como uma “ferramenta” didática, de certa forma, apropriando-se seletivamente de pensamentos de gerações anteriores, em nosso benefício, traduzidos em linguagem atual e elencados apenas pela possibilidade de sua compreensão encadeada com os conhecimentos atuais (Saito, 2016).

A tendência historiográfica atualizada é aquela que procura examinar como se deu o desenvolvimento da Matemática de um período histórico nos seus próprios termos, ou seja, visto com “os olhos do período”. Portanto, utiliza-se do simbolismo e da terminologia dessa cultura, evitando expressões como “arcaico” ou “rudimentar”, exceto quando encontrados na crítica contemporânea. Nessa perspectiva, devemos fazer o esforço de nos colocarmos no contexto intelectual de uma cultura e buscar perceber como os contemporâneos sentiram ou pensaram sobre a Matemática de seu tempo, o que inclui outros aspectos epistemológicos, metafísicos, teológicos, econômicos, sociais etc., ligados a natureza do conhecimento matemático (Saito, 2016).

Portanto, particularmente em relação à articulação da História com o ensino da Matemática, a adoção bastante comum da perspectiva disponível na maior parte dos materiais de consulta, reflete a ausência de preceitos teóricos mais nítidos, na medida em que limita significativamente as ações didáticas. Saito (2016) propõe a familiarização de educadores matemáticos com as tendências historiográficas atuais, a fim de conscientizá-los de que narrativas históricas não são neutras e, assim, habilitá-los a produzir narrativas com maior potencial didático, que permitam ressignificar as amarras conceituais habituais e propor novas estratégias de ensino.

Entretanto, Saito (2018) chama a atenção para o fato de que a introdução de uma narrativa historiográfica específica no ensino impõe como adversidade um paradoxo: embora a abordagem atualizada seja mais abrangente culturalmente, ao elaborar atividades sob sua perspectiva, os objetos matemáticos atuais ficariam descaracterizados, pois a linguagem, a notação, as definições etc., seriam problemáticas para o ensino moderno. Por outro lado, ao interpretar objetos matemáticos do passado com a historiografia tradicional ocorrem, como é comum, anacronismos, que tem sido profundamente criticados por historiadores.

Em que pese uma defesa em qualquer sentido, por questão de coerência epistemológica, alguns estudiosos apontam caminhos que nos permitem trilhar entre estas perspectivas diametralmente opostas. Miguel e Miorim (2005) sugerem uma possibilidade historiográfica mais crítica para o ensino, por meio de uma História pedagogicamente vetorizada, ou seja, uma história a ser escrita cada vez mais sob o ponto de vista do educador matemático, “é uma história que deveria se constituir a partir de problemas e questões que emergem das e/ou se relacionam com as práticas sociais nas quais a cultura matemática se acha envolvida” (Miguel e Miorim, 2005, p. 158).

Não se trata aqui, sob nosso ponto de vista, de encontrar um equilíbrio entre as historiografias, mas sim de poder contar com aspectos distintos das abordagens, de modo a compor um enfoque plural e flexível, compreensível pelos estudantes; no qual a dialética lógico-histórica e o contraste entre os contextos histórico-culturais permitam um diálogo harmonioso entre o passado e o presente.

3.4 A relação da Matemática com outros saberes

A consideração mais elementar a ser feita, inicialmente, conforme Miguel e Miorim (2005), é que não há uma única História da Matemática, já que a principal influência sobre essa Historiografia decorre da concepção de Ciência daquele que a produz.

Recentemente, os estudos mais cautelosos sobre documentos ignorados ou marginalizados pela forma tradicional de escrita, bem como a evolução dos instrumentos de análise, vem dando à História uma feição mais crítica, o que pode promover mudanças nas concepções mais difundidas de História da Matemática e favorecer sua interface com o ensino, desde que bem compreendidas por educadores matemáticos (Saito, 2018).

O grupo HEEMa, neste sentido, tem investigado instrumentos matemáticos antigos, em geral reduzidos pela escrita tradicional a meros artefatos, neutros e não problemáticos. Do ponto de vista epistemológico, as pesquisas tem mostrado que os mesmos não só incorporam conhecimentos mas redefinem relações entre saberes, desse modo podendo fornecer elementos para compor ações pedagógicas (Saito, 2018).

Particularmente na elaboração de uma Historiografia pedagogicamente vetorizada, a Matemática pode ser abordada como uma manifestação cultural. Esta perspectiva amplia-se quando examinamos seu papel na História geral das ideias filosóficas, teológicas, religiosas e artísticas. A Matemática, na qual círculos e esferas, bem como sólidos regulares, têm papel excepcional como figuras de perfeição, foi tecida na filosofia pitagórico-platônica. Platão afirmava que aquele que não fosse geômetra não poderia entrar em sua Academia. A Matemática não só era fundamental para a compreensão da Filosofia na época, mas também tinha valores éticos e religiosos (Struik, 1985).

O enfoque social, por sua vez, pode ser discutido de diferentes formas; por exemplo, “o método pelo qual o desenvolvimento da Matemática e da ciência em geral é descrito em nossos livros pode ser comparado como uma caminhada ao longo da crista de uma serra, passando de um cume a outro” (Struik, 1985, p. 207). De modo geral, restringe-se os relatos, as teorias e teoremas à alguns poucos personagens, uma espécie de culto aos heróis, uma maneira bastante simplista de escrever a História da Matemática. Entretanto, contemporâneos e antecessores têm invariavelmente papel relevante, sem o qual tais teorias ou teoremas nem sempre seriam possíveis, o que aconselha-se ser explicitado (Struik, 1985).

Por outro lado, a Matemática sempre esteve envolvida com assuntos importantes para a indústria e para o governo. Assim, é possível estender essa questão à História da Matemática, examinar tanto períodos de revoluções sociais quanto períodos de estabilidade social encontrando razões para o desenvolvimento da Matemática. A classe média através da revolução francesa, por exemplo, produziu suas próprias instituições de saber. Na nova Escola de Engenharia, a Escola Politécnica de Paris, abriram-se as perspectivas para o surgimento das novas geometrias do século XIX (Struik, 1985).

Igualmente relevante é a relação entre a Matemática e a Etnomatemática, que inclui também o reconhecimento da existência de conhecimento matemático em todas as culturas e povos, inclusive aqueles que foram, em algum momento da História, conquistados por outros. D’Ambrosio (2008) ao distinguir os cinco tipos de Matemática praticadas, ou de Etnomatemáticas européias, durante as grandes navegações destaca: uma Matemática relacionada ao misticismo e a religiosidade, incluindo fenômenos naturais tais como a velocidade e o movimento dos planetas; uma outra mercantil, contábil; outra praticada por arquitetos e artistas; uma quarta ligada às navegações, envolvendo Astronomia e Geografia; e, uma quinta, que reunia a Matemática dos povos conquistados, incluía construções e considerava também aspectos astronômicos, sendo esta porém, segundo o autor, por muitos ainda não reconhecida como um tipo de Matemática.

Deve-se considerar ainda a Matemática apenas como uma das formas de Ciência, decorrendo daí uma quarta abordagem para a construção de uma Historiografia pedagogicamente vetorizada. É fundamental desmitificar a imagem difundida de que a atividade matemática foi realizada de modo autônomo ou sem qualquer influência de outros campos. Quando observada pelo contato com as Ciências Naturais, suas relações com a Astronomia vêm em primeiro lugar, pois esta tem sido seu campo mais antigo de aplicação (Struik, 1985). Einstein, por exemplo, elaborou um modelo de Universo tendo por base as modernas teorias matemáticas. Na Física temos outra antiga companheira para aplicações da Matemática (Struik, 1985).

O mais antigo livro sobre História da Matemática que se tem registro, publicado em 1758 pelo filósofo Jean Etienne Montucla, em dois volumes, faz a distinção entre Matemáticas Puras e Matemáticas Mistas; estas, contemplavam as aplicações em Astronomia, Mecânica, Ótica e Música (Struik, 1985). Essa obra surge como reflexo de um contexto de debates sobre a busca de uma nova concepção de Ciência e “mais do que uma narrativa de acontecimentos do passado, ela foi utilizada para justificar posições e argumentos a favor da Ciência (e, portanto, da Matemática)” (Saito, 2018, p.610), resgatando a Matemática antiga juntamente com as contribuições recentes, feitas durante o Renascimento:

> Diferentemente de épocas anteriores, em que a história tinha apenas um papel retórico e era utilizada pelos antigos e medievais para valorizar e contrapor antigos saberes com vistas a defender pontualmente uma posição filosófica, metafísica ou religiosa, a partir do século XVI, ela passou a ser utilizada como um conjunto de testemunhos de ocorrências do passado que legitimavam um discurso em prol do progresso do conhecimento (Saito, 2018, p.610-611).

É oportuno destacar ainda que o termo “Matemáticas” referia-se tanto à campos da própria área: Geometria; Álgebra; Cálculo; etc., até metade do século XX (Miorim, 1998), quanto à outras áreas de conhecimento, até metade do século XIX:

> A “matemática”, como área autônoma e unificada de “conhecimentos matemáticos”, só se institucionalizou em finais do século XIX. Antes disso, esses conhecimentos matemáticos encontravam-se “pulverizados” e eram parte integrante de outros segmentos de saber, tais como a astronomia, a agrimensura, a música, a hidrostática, a pneumática, a mecânica etc., que eram conhecidas como “matemáticas” (no plural). Isso significa que reconhecemos existir “conhecimento matemático” no passado porque estamos familiarizados com ele no presente. Porém, no que diz respeito à história da matemática, não podemos perder de vista que as “matemáticas” no

> passado se constituíam como campos de conhecimento complexos, que incluíam vários domínios de saber (Saito, 2018, p. 609).

Portanto, possivelmente a difusão do mito da “Matemática como atividade isolada” tenha suas origens ao longo do século XIX, quando no campo da pesquisa suas fronteiras estenderam-se para além da tendência habitual de ver na Mecânica e na Astronomia a finalidade última das Ciências Exatas. A conexão com a prática nunca extinguiu-se, porém lentamente foi tornando-se mais reduzida, a ponto de promover o surgimento de especialistas. Paralelamente, as reformas educacionais iniciadas na França, após a Revolução Francesa, foram aproximando o saber matemático da cultura popular. Matemáticos foram dedicando-se também ao ensino, “sua principal ocupação não consistia mais em ser membro de uma academia culta; eram frequentemente empregados por universidades ou escolas técnicas e eram professores, assim como investigadores” (Struik, 1987, p. 226).

4. REFERENCIAIS TEÓRICOS

A adoção dos referenciais teóricos esteve vinculada às características mais fundamentais desta pesquisa, ou seja, em síntese, os estudos de Vygotski contribuem com ênfase na essência social do aprendizado humano através do conceito de Zona de Desenvolvimento Proximal e da importância da figura do facilitador – parceiro mais capaz –, ao passo que D'Ambrosio contribui com a constituição social do conhecimento na medida em que enfoca a influência dos aspectos culturais em sua obtenção e natureza, questionando e ampliando possibilidades de contextualizações.

4.1 Vygotski

Vygotski (1991), no capítulo sobre Interação entre aprendizado e desenvolvimento, expõe uma parte das implicações educacionais de sua teoria. Analisa algumas posições teóricas aceitas na época sobre a relação entre aprendizado e desenvolvimento e conclui que as mesmas eram insatisfatórias, pois examinavam apenas parte desta relação, sendo por esse motivo incompletas. Os estudos de Vygotski foram realizados com crianças. Ele inicia sua argumentação baseando-se no fato de que muito antes da idade escolar as crianças já têm um contato prévio com a aprendizagem de qualquer conceito que lhes venha a ser apresentado, no entanto, numa linguagem própria, diferente da linguagem formal, e que esse fator influencia o seu aprendizado, pois está vinculado a aquisição da linguagem científica.

Àquela época (décadas de 1920 e 1930) já era estabelecido como fato empírico que o aprendizado deveria ser, de alguma forma, combinado ao desenvolvimento da criança, e Vygotski (1991) discorda dessa posição, argumentando que seria necessário delimitar pelo menos dois níveis de desenvolvimento. Um deles poderia ser chamado de nível de desenvolvimento real, ou seja, níveis mentais da criança já estabelecidos por certos ciclos de aprendizagem já completados. Esse nível era o único detectado pelos testes que visavam obter a idade mental da criança, realizados até aquele momento, só admitindo como referência as atividades que a criança já conseguia realizar por si mesma. Entretanto, o desempenho nas atividades propostas com algum auxílio do professor, fosse com dicas ou iniciando parte da solução, ou mesmo uma solução construída pela criança em colaboração com colegas, não era considerado em tais testes. Foi exatamente esse o segundo nível de desenvolvimento que Vygotski evidenciou, oportunizando através dele significativas contribuições, mostrando que justamente essas experiências, negligenciadas até então, não só deveriam ser consideradas, como também poderiam ser muito mais indicativas do desenvolvimento mental da criança.

Conforme Vygotski (1991), ainda que a aplicação dos testes tradicionais a duas crianças em idade escolar, ambas com dez anos cronológicos, detectasse oito anos em termos de desenvolvimento mental, para cada uma, isso não seria suficientemente satisfatório como índice. Se fosse proposto às crianças atividades com a assistência dele e uma delas pudesse lidar com problemas até o nível de 12 anos de idade e a outra até o nível de 9 anos de idade, então, não poderíamos afirmar com segurança que essas crianças teriam mesmo nível de desenvolvimento mental. Essa diferença entre doze e oito ou entre nove e oito, foi o que Vygotski denominou Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP). Ela é a distância entre o nível de desenvolvimento real, que se costuma determinar através da solução independente de problemas, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da resolução de problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração com um parceiro mais capaz, ou seja, um facilitador do aprendizado.

Conforme Vygotski (1991), o nível de desenvolvimento real representava o progresso já realizado, enquanto a zona de desenvolvimento proximal caracterizaria o futuro próximo da criança, não apenas dando acesso ao que já havia conquistado, mas também ao que estava em processo de amadurecimento. Assim, o estado mental de uma criança só poderia ser revelado se fossem examinados estes dois níveis. A compreensão mais profunda da ZDP tanto aperfeiçoaria os testes diagnósticos sobre desenvolvimento mental, quanto deveria levar a uma reavaliação do papel da imitação no aprendizado, destacando ser esse um ponto intocável pela psicologia clássica, mas que alguns psicólogos de sua época já estavam demonstrando que uma pessoa só conseguia imitar aquilo que estava no seu nível de desenvolvimento. Portanto, salientando que o aprendizado humano pressupõe uma natureza social específica e demonstrando que em atividade coletiva ou sob a orientação de adultos, usando a imitação, as crianças eram capazes de fazer muito mais coisas.

O equívoco dos testes diagnósticos foi apontado por Vygotski (1991) mais na prática do que na teoria, no ensino de crianças com certo atraso cognitivo em relação à média populacional; pois, segundo os mesmos essas crianças não eram capazes de ter pensamento abstrato. Isso ocorria porque, como mencionado anteriormente, tais diagnósticos eram orientados para o passado, ou seja, em relação ao desenvolvimento anterior. Acreditava-se que tais testes poderiam nortear o ensino dessas crianças e, como consequência, esse deveria ser baseado em métodos concretos, tipo "observar-e-fazer". Vygotski (1991) demonstrou que esse formato de ensino, que excluía todo e qualquer pensamento abstrato, não apenas falhava em ajudar as crianças a amenizarem suas deficiências inatas, mas também acentuava as mesmas. E que, portanto, o concreto deveria ser visto como um meio de se chegar ao pensamento abstrato e não um fim, destacando que quando em um distanciamento benéfico do concreto a técnica do "observar-e-fazer" encontraria sua real contribuição. Por conseguinte, a noção de ZDP trouxe uma nova proposta para o ensino, a de que o bom aprendizado é somente aquele que se adianta ao desenvolvimento.

4.2 Ubiratan D'Ambrosio

Analisando os empregos do termo "Etnomatemática" em D'Ambrosio (2005), segundo Santos (2022), evidencia-se que a expansão do conceito não sofreu contradições ao longo do tempo e que a amplitude das ideias traduzidas pela palavra Etnomatemática permite abordagens distintas tanto na pesquisa quanto no ensino da Matemática.

A concepção que nos remete aos primeiros estudos e palestras realizados por D'Ambrosio, quando a palavra ainda não havia sido criada, é a de que Etnomatemática consiste na Matemática praticada por diferentes culturas, portanto, tendo características de uma matemática utilizada por determinados grupos sociais. Todavia, mesmo depois do longo amadurecimento de suas ideias, D'Ambrosio continuou adotando tal concepção, em particular quando faz uma forte crítica a "Matemática do dominador", aquele que coloniza e impõe sua cultura:

> A disciplina denominada matemática é, na verdade, uma Etnomatemática que se originou e se desenvolveu na Europa do Mediterrâneo, tendo recebido algumas contribuições das civilizações indiana e islâmica, e que chegou à forma atual nos séculos XVI e XVII,

> sendo, a partir de então, levada e imposta a todo o mundo. Hoje, essa matemática adquire um caráter de universalidade, sobretudo devido ao predomínio da ciência e tecnologia modernas, que foram desenvolvidas a partir do século XVII na Europa. (D'Ambrosio, 2005, 114)

No momento em que D'Ambrosio apresenta a palavra Etnomatemática pela primeira vez, segundo Santos (2022), em 1984, ela reflete nova concepção e amplia as ideias iniciais, pois ele a emprega a partir das raízes etmológicas que a compõem (D'Ambrosio, 2005), a fim de caracterizar a extensão de sentido que seus estudos haviam alcançado, praticamente identificando-a com uma Etnociência:

> as maneiras, os modos, as técnicas, as artes (techné ou "ticas") de explicar, de conhecer, de entender, de lidar com, de conviver com (mátema) a realidade natural e sociocultural (etno) na qual a espécie Homo sapiens sapiens, - assim como as que a precederam - está inserida. (D'Ambrosio, 2005, p.112)

Mais tarde, em 1993, D'Ambrosio compreende a Etnomatemática como assumindo a dimensão de um "Programa de Pesquisa" no sentido Lakatosiano, afirmando que a abordagem de distintas formas de conhecer é a sua essência, que abarca a História e a Filosofia da Matemática. Não ficando, pois, diferentemente do que sugere o termo, restrito ao estudo de "Matemáticas das diversas etnias":

> O Programa Etnomatemática se apresenta como um programa de História e Filosofia da Matemática, com importantes reflexos na Educação. (D'Ambrosio, 2005, p.102)

Ao examinar as bases nas quais o Programa de Pesquisa é descrito, evidencia-se uma quarta concepção de Etnomatemática, a qual aproxima-se de uma epistemologia, de uma teoria da cognição, ou de uma história do conhecimento, que expõe o conhecimento como decorrência da relação entre saberes e fazeres, analisando e questionando essa dualidade:

> A consciência é o impulsionador da ação do homem em direção ao saber/fazendo e fazer/sabendo, isto é, à sobrevivência e à transcendência. O processo de aquisição do conhecimento é, portanto, essa relação dialética saber/fazer, impulsionado pela consciência, que se realiza em várias dimensões, das quais destacam-se quatro: sensorial, intuitiva, emocional e racional. Tudo se complementa num todo, que é o comportamento, e que tem como resultado o conhecimento. (D'Ambrosio, 2005, p.109)

Desde suas origens as pesquisas de D'Ambrosio revelaram-se como estudos na área da Educação Matemática, que consistem em uma concepção particular do Programa de Pesquisa e adicional do termo Etnomatemática. Neste caso, influencia importantes sub-áreas da Educação Matemática, como a resolução de problemas, a modelagem matemática, e a História da Matemática. Sob esse prisma, a Etnomatemática não é uma disciplina curricular, mas sim um enfoque holístico com significativo potencial de exploração pedagógica:

> Contextualizar a matemática é essencial para todos. Afinal, como deixar de relacionar Os Elementos de Euclides com o panorama cultural da Grécia antiga? Ou a aquisição da numeração indo-arábica com o florescimento do mercantilismo europeu nos séculos XIV e XV? (D'Ambrosio, 2005, p.115)

Por conseguinte, o Programa de Pesquisa Etnomatemática, ao contemplar aspectos que circunscrevem a Matemática tradicional, explicita que qualquer cultura estudada revela manifestações matemáticas de comparação, organização, classificação, contagem, medição e inferência, as quais geralmente estiveram, ou estão, aglutinadas ou dificilmente distinguíveis do que hoje identifica-se como arte, religião, música, técnicas e ciências. Em todas elas o conhecimento, enquanto instrumento de reflexão, é gerado pela necessidade de resposta e transcendência à contextos socioculturais. Por isso, o conjunto do conhecimento acumulado pela humanidade e a forma como se apresenta em determinado intervalo da História, ou ainda, os novos sentidos assumidos pelos signos e significados dependendo do momento que se analisa - Zeitgeist - influencia significativamente as mentalidades emergentes (D'Ambrosio, 2005).

As atuais tecnologias de comunicação e o acesso à informação apressam a socialização e difusão de modelos culturais alternativos através do encontro de culturas, criando uma dinâmica cultural que, em seu confronto, ocasiona desde a convivência multicultural igualitária ou com alguma subordinação até, algumas vezes, a extinção de uma das culturas. Nesse caso, como decorrência do processo de Globalização, pode significar certa *imposição silenciosa* de uma *cultura planetária* em detrimento da diversidade cultural. A título de exemplo, a apressada substituição do sistema binário dos Xavantes (povo que vive atualmente no estado do Mato Grosso em nove terras indígenas) pelo decimal não ocorreu porque este atenderia ao contexto das necessidades habituais dos Xavantes, mas porque se relacionava com outras culturas. O mesmo se dá com alguns idiomas nativos. A interação cultural não deve ser excludente sob pena de ceifar a identidade e a criatividade do indivíduo que seriam, nesse caso, proporcionadas pelo domínio de duas etnomatemáticas, possibilitando mais amplas reflexões sobre diferentes contextos socioculturais (D'Ambrosio, 2005).

Tais dinâmicas culturais têm se refletido nos sistemas educacionais, alguns dos quais embora absorvendo pressões de estudos e avaliações internacionais – cujo objetivo é mensurar com padronizações – têm procurado resistir, a fim de atender as demandas de preservação de identidade por parte de certos contextos culturais. D'Ambrosio (2005, p. 112) defende que "assim como a biodiversidade representa o caminho para o surgimento de novas espécies, na diversidade cultural reside o potencial criativo da humanidade". O enfoque disciplinar habitual está subordinado a própria área de conhecimento, podendo esbarrar em comportamentos de arrogância, que podem gerar posturas incontestáveis. Enquanto abordagens mais holísticas, que admitem a inviabilidade de se atingir o conhecimento final, permanentemente buscam novos entendimentos, e por isso mesmo, flexibilizam comportamentos. Daí por que, esta prática pode auxiliar a promover uma convivência mais respeitosa e solidária com o diferente (D'Ambrosio, 2005).

Em que pese a importância da técnica para interpretar o aprendizado no ensino da Matemática, o resultado parece ser uma redução da escolarização, nesta área, à conteúdos e métodos relevantes apenas cientificamente. É necessário aprendermos a observar as capacidades cognitivas associadas a circunscrições que possam trazer reflexões mais amplas, de maior valor formativo, ou seja, avaliar habilidades cognitivas a partir de contextos culturais, como elementos integrantes do processo de aprendizado. Cada indivíduo têm um modo particular de desenvolver-se intelectualmente, por isso mesmo as práticas mais tradicionais não devem prescindir de contribuições mais abrangentes, a fim de que a autenticidade e a individualidade de cada um dos participantes do processo sejam preservadas (D'Ambrosio, 2005).

Uma tendência nesta direção é a chamada Educação Multicultural, que vem surgindo nos sistemas educacionais de todo o mundo. Adotada pela maioria dos países, a Declaração de Nova Délhi (16 de dezembro de 1993) é enfática ao reconhecer que a educação é o instrumento por excelência para promover valores humanos universais tais como, por exemplo, o respeito à diversidade cultural. Assim, os conteúdos e métodos da educação devem ser desenvolvidos conforme às necessidades básicas de aprendizagem dos indivíduos e das sociedades, capacitando-os a lidar com seus problemas mais urgentes: combate à pobreza, aumento da produtividade, melhora das condições de vida e proteção ao meio ambiente (D'Ambrosio, 2005).

D'Ambrosio (2005) oportuniza uma breve ponderação utilizando-se do trinômio do 2º grau, apenas para fins ilustrativos de abordagem Etnomatemática, sobre tema recorrente em seus estudos, a paz mundial, evidenciando a interferência das atitudes humanas no meio ambiente e, ao final, enfatiza que as raízes da ausência da paz, em quaisquer instâncias, estão relacionadas invariavelmente às diferenças culturais. Ele não se via senão como Educador para o qual a Matemática era seu instrumento de ação e não apenas atividade técnica para o exercício mecânico de suas competências ou mesmo como oportunidade de proselitismo. Em síntese, pode-se afirmar que a proposta da Etnomatemática, para além de uma visão sistêmica sobre contextos culturais na área do ensino da Matemática, concita às práticas tradicionais a reflexões inusitadas acerca de valores ético-morais e críticos (D'Ambrosio, 2005).

5. METODOLOGIA

Ao organizarmos este capítulo, optamos por fazê-lo gradualmente, dos conceitos mais teóricos aos seus aspectos mais práticos, em etapas. Inicialmente, apresentam-se os fundamentos metodológicos mais amplos deste trabalho, buscando fornecer ao leitor uma visão panorâmica da abordagem, deixando para as seções seguintes uma descrição das intervenções mais específicas da investigação, explicando em maiores detalhes na última delas o passo a passo da pesquisa. Destacamos que esta é uma pesquisa de abordagem qualitativa, caracterizada como pesquisa-ação, ambas serão descritas em detalhes nas próximas seções.

5.1 Pressupostos filosóficos

A partir do momento em que a pesquisa qualitativa suplanta a hegemonia da influência positivista nas ciências humanas e sociais, traz à tona a complexidade, as contradições e imprevisibilidades características das relações interpessoais e sociais, abrindo mão da busca de padrões estáveis que conduziam a generalizações insatisfatórias que, entre outros efeitos, dissimulavam o controle ideológico da própria pesquisa; passando então a adotar como foco a análise do significado que os indivíduos dão às suas ações, bem como o vínculo indissociável destas ações com o contexto social onde acontecem (Chizzotti, 1995).

Um segundo aspecto dessa nova abordagem é a forma como capta e legitima o conhecimento, que não se resume mais a um conjunto de dados estanques ligados a uma teoria explicativa, mas traduz-se por um objeto de estudo não neutro, adquirindo sentidos e interpretações diversos, inclusive por parte do sujeito-observador que integra o processo de aquisição desse conhecimento (Chizzotti, 1995).

A fonte oral de dados assume papel abrangente em pesquisa. Portelli (1997, p.31) afirma que uma rara característica desta fonte, e que nenhuma outra tem sobre o pesquisador, é a subjetividade do expositor, pois ele não narra apenas o que foi feito, mas o que acreditava estar fazendo e o que agora pensa ter feito.

As bases filosóficas desta relação do sujeito com o conhecimento são principalmente a fenomenologia e a dialética. A primeira considera que a submersão nos costumes e a sintonia com o que é sensível velam os fenômenos; por isso é necessário ir além das impressões imediatas para desvendar o real sentido que os atores sociais atribuem ao objeto de estudo. A última, não se detém no que é vivido e nas significações subjetivas dos atores sociais, valoriza a contradição dinâmica entre o fato observado e a interpretação do sujeito, bem como as oposições contraditórias do saber e do agir com a vida social do homem (Chizzotti, 1995).

Portanto, os dados desta pesquisa não foram acontecimentos fixos, obtidos em um instante de observação, mas constituiram-se no universo das percepções, das emoções e interpretações dos sujeitos envolvidos neste estudo, nos ambientes em que estavam inseridos. Todos os fenômenos foram igualmente preciosos: a experiência das docentes, suas expectativas com relação ao tema deste estudo, a constância ou ocasionalidade de suas manifestações, assim como a mensagem de cada fala e de cada silêncio.

5.2 Sobre a heurística de pesquisa

Entenda-se por aquilo que se denomina *raciocínio heurístico* algo que não se considera final, nem rigoroso, mas apenas provisório e plausível, “assim como andaimes são necessários a construção de um edifício” (Polya, 2006, p. 152), tendo por objetivo intermediar a elaboração de uma solução, demonstração ou problema em geral.

Em três de suas quatro fases esta pesquisa contou com a dinâmica da Roda de Conversa. Nosso raciocínio heurístico aqui, no início, foi o de que o modo para se captar, da melhor forma, o ambiente das participantes er apor meio de uma roda de conversa. Esta heurística é inspirada numa prática denominada "Círculo de Cultura”, desenvolvida pelo educador brasileiro Paulo Freire, desde o início das suas atividades ligadas à alfabetização de adultos, em 1950 no Nordeste do país:

> De acordo com as teses centrais que vimos desenvolvendo, pareceu-nos fundamental fazermos algumas superações, na experiência que iniciávamos. Assim, em lugar de escola, que nos parece um conceito, entre nós, demasiado carregado de passividade, em face de nossa própria formação (mesmo quando se lhe dá o atributo de ativa), contradizendo a dinâmica fase de transição, lançamos o Círculo de Cultura. Em lugar de professor, com tradições fortemente “doadoras”, o Coordenador de Debates. Em lugar de aula discursiva, o diálogo. Em lugar de aluno, com tradições passivas, o participante de grupo. (Freire, 1974, p. 103)

Ao adotar a roda de conversa, desde as primeiras experiências, o foco de Paulo Freire era de cunho social, no sentido de inclusão do indivíduo na sociedade. Partia da própria cultura cotidiana de trabalhadores analfabetos e promovia o resgate de relações culturais que favorecessem uma visão democrática. Aos poucos, essa metodologia empolgou toda uma geração de intelectuais interessados na educação de massas e mais tarde alcançou inclusive a política governamental:

> Essa metodologia pretendia ser "rápida, moderna e barata" e, em 40 horas, alfabetizar os adultos que, assim, poderiam "ler melhor o mundo" e, inclusive, adquirir o direito de votar, de escolher (o que até pouco tempo foi vedado aos analfabetos). Isso que ficou conhecido como "Método Paulo Freire" empolgou toda uma geração de professores, estudantes, intelectuais, artistas, integrantes das chamadas "forças de esquerda" que viram nele a possibilidade concreta de "elevar culturalmente as massas" e de vencer eleições. Respaldado pelo governo Goulart, insuflado por vários movimentos de cultura e educação popular, Freire foi coordenar o Plano Nacional de Alfabetização (PNA) no final de 1963. Esse Plano previa a alfabetização "em massa" de 5 a 6 milhões de brasileiros em 1964 através da formação de 20.000 "círculos de cultura" (SCOCUGLIA, 1999, p. 8).

Segundo Warschauer (2017b), esta vivência pedagógica estimula a empatia, a expressão dos projetos individuais, a autodescoberta dos envolvidos, a criatividade para a aquisição de conhecimentos sobre o mundo e o consequente hábito da reflexão, elementos estes fundamentais e motivadores tanto para ensino, aprendizagem e pesquisa, quanto para o aprimoramento ético-moral individual e coletivo:

> é a qualidade das trocas estabelecidas no processo partilhado que propicia o desenvolvimento criativo individual e grupal: o cuidado mútuo, a escuta sensível, o acolher e ser acolhido, a paixão de aprender e ensinar, de pesquisar e aprender, a paciência no falar e ouvir, a amorosidade na convivência, a tolerância nas diferenças, o prazer estético partilhado, o respeito durante os conflitos, a coragem de ver-se no outro, de olhar para ele e para si, de formar-se formando (...). (Warschauer, 2017a, p. 364-365)

Através do seu caráter informal, a Roda de Conversa oportuniza a aproximação entre os participantes, promove o diálogo, a abertura necessária para a apresentação de diferentes pontos de vista, fortalecendo e empoderando o grupo (Warschauer, 2017a). Deste modo, pensar a formação continuada por meio da Roda de Conversa traduz-se na conscientização da permanente auto-formação como alternativa às práticas hegemônicas:

> [...] proporcionar oportunidade de apropriação desses saberes experienciais, criando situações em que os docentes reflitam sobre suas ações, tanto recentes quanto de suas histórias de vida. É nesta perspectiva que as abordagens autobiográficas podem ser caminhos de investimento na formação de adultos, e portanto, de professores, pois a formação passa pela compreensão das experiências vividas (…). Pensar a formação dessa maneira é revolucionar as práticas formativas hegemônicas, pois se trata de abdicar da procura de didáticas que deem conta da formação, pois é o sujeito que se forma, e sua formação está enraizada em seu percurso de vida, em suas experiências, em sua singular maneira de aprender. (Warschauer, 2017a, p. 160-161)

Por conseguinte, através de seu potencial dialógico, a Roda de Conversa impulsionou os propósitos deste trabalho, oportunizando reflexões que foram muito além de um método de pesquisa; uma vez que norteando fases fundamentais do ciclo metodológico, desempenhou a função de uma heurística; fomentando a criatividade das participantes tanto na busca de alternativas pedagógicas para suas atividades práticas quanto na interpretação das experiências resultantes, o que em seu conjunto contribuiu para a obtenção de respostas ao problema de pesquisa.

5.3 Sobre as fases desta pesquisa-ação

Adotou-se neste estudo a pesquisa-ação na perspectiva de Thiollent (1997). As características fundamentais desta modalidade de pesquisa consistem em utilizar-se de certo pragmatismo, da conscientização e do espírito coletivo de pesquisa, buscando promover a autonomia dos participantes, enquanto sujeitos-pesquisadores. A pesquisa-ação envolve os atores de maneira igualitária e democrática. A relação entre pesquisador e participantes é horizontal, isto é, o pesquisador também participa da pesquisa-ação - não sendo apenas observador -, daí porque a pesquisa-ação tem como intuito diagnosticar a situação-problema e propor ações coletivamente. Consiste não só em uma modalidade de pesquisa social com base empírica, mas também numa expressão de pesquisa aplicada (Thiollent, 1997).

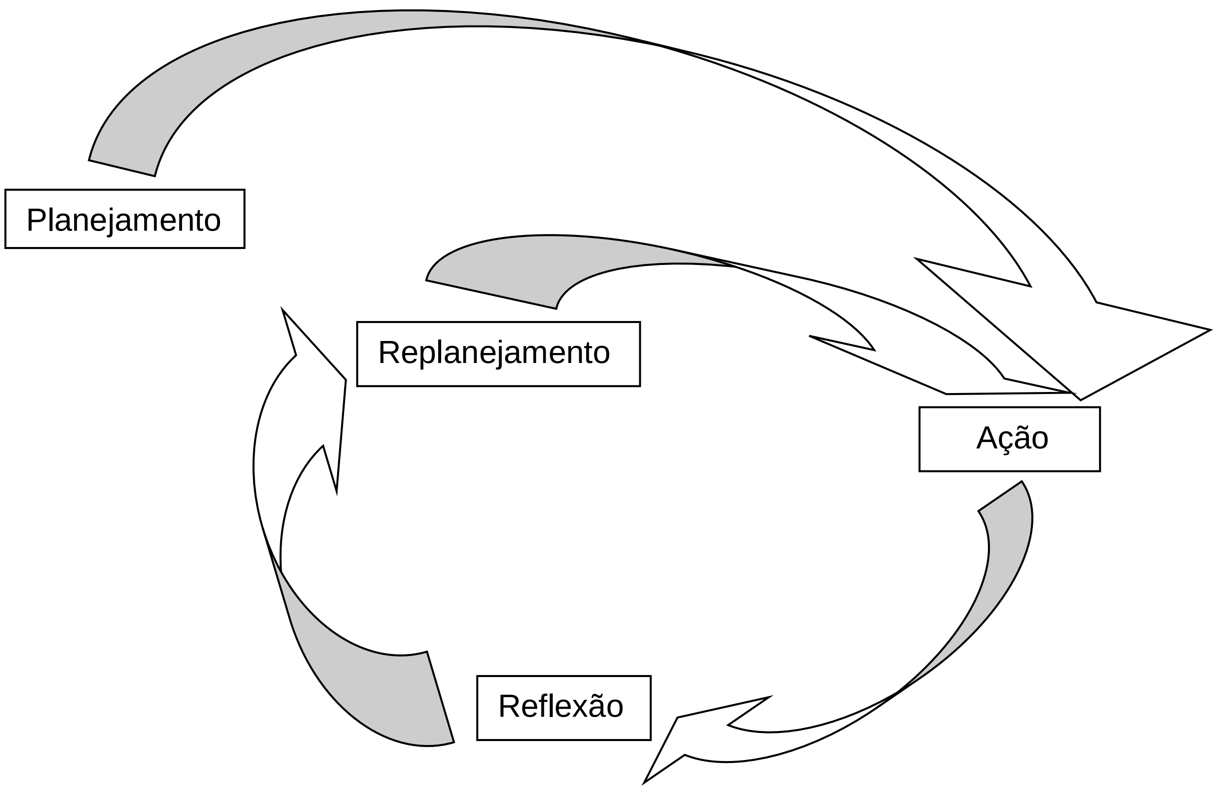
Thiollent (1985) aponta que a crescente utilização de métodos participativos, em especial o de pesquisa-ação, na área da Ensino, tem encontrado justificativa em certa insatisfação com as metodologias tradicionais, que embora tenham sua utilidade, limitam-se a descrição das situações ou a uma avaliação de rendimentos escolares, e por isso mesmo permanecem distantes das reais necessidades do sistema educacional:

> A pesquisa-ação promove a participação dos usuários do sistema escolar na busca de soluções aos seus problemas. Este processo supõe que os pesquisadores adotem uma linguagem apropriada. Os objetivos teóricos da pesquisa são constantemente reafirmados e afinados no contato com as situações abertas ao diálogo com os interessados, na sua linguagem popular. (Thiollent, 1985, p.75)

Conforme Thiollent (1985), o ciclo metodológico (Figura 1) da pesquisa-ação permite aos pesquisadores e participantes produzirem informações e conhecimentos de uso mais efetivo, em especial ao nível pedagógico, para o caso de pesquisas de âmbito educacional, o que pode auxiliar seguramente microssituações escolares com objetivos de transformações mais abrangentes.

Thiollent (1997) afirma que o roteiro de uma pesquisa-ação é bastante flexível, eis porque neste trabalho optou-se por uma distinção mais sucinta das fases desta modalidade de pesquisa, adotando-se apenas as que fossem necessárias e suficientes aos propósitos da investigação:

Figura 1 – Fases da Pesquisa-Ação



Fonte: Autoria própria.

A pesquisa teve como participantes duas professoras não identificadas. Para preservar a identidade das participantes, não inserimos aqui neste texto informações mais específicas sobre idade, formação, em quantas escolas trabalham ou o contexto da escola. Podemos informar, sem prejudicar o sigilo, que são professoras com pós-graduação concluída, com cerca de dez anos de atuação docente na área de Matemática, e ambas trabalham em mais de uma escola. A escola abordada na pesquisa se localiza na área urbana da cidade, e atende estudantes de vários bairros, sendo muitos deles provenientes de famílias de baixa renda.

A primeira fase – de planejamento – desenvolveu-se pela aproximação entre o pesquisador e as participantes do estudo, a fim de: fornecer-lhes subsídios para um planejamento; obter o comprometimento do grupo pelo esclarecimento das fases da pesquisa; conhecer algumas vivências das participantes em relação ao tema deste estudo; como também, algo sobre suas expectativas.

A segunda fase – de ação – teve essencialmente caráter individual e prático, pois, conforme explicaremos nos procedimentos, só uma das participantes esteve presente em todas as fases da pesquisa e a mesma aplicou as atividades de seu próprio planejamento em cada uma de suas respectivas turmas, período no qual enviou relatos narrando a aplicação.

A terceira fase – de reflexão – iniciou-se através do envio de um último relato, uma síntese espontânea, contendo a impressão mais recente da participante sobre a fase anterior após o término das atividades, isto é, sua percepção geral sobre os efeitos das atividades, e continuou durante as semanas seguintes até nova aproximação entre pesquisador e participantes para obtenção de reflexões já mais elaboradas por certo tempo de observação e contato com os estudantes. Na ocasião, discutiu-se a repercussão da abordagem nos sujeitos da aprendizagem.

A quarta fase – de replanejamento – consistiu no exame específico do Produto Educacional (Secção 5.4), analisando-se certos aprimoramentos em sua estrutura e atividades para dar continuidade a proposta futuramente.

Segundo Thiollent (1997), após a última fase, o ciclo metodológico vivenciado deixa aos participantes a possibilidade de recomeça-lo independente do grupo de pesquisa, pois a proposta desenvolvida resulta em certo amadurecimento de suas práticas e viabiliza a opção de sua implementação de forma permanente às atividades dos docentes, a partir da constituição de pequenos grupos de estudo, pesquisa e formação continuada.

5.4 Sobre o produto educacional

Tendo adotado como ponto de partida para essa pesquisa um problema de ensino e de aprendizagem, e tendo a intenção de prestar um auxílio, um encorajamento, aos colegas que partilhassem de problemas correlatos a fim de qualificar suas práticas, optamos pelo formato de Texto de Apoio aos Professores como produto educacional.

Em que pese a falta de definição sobre as características desse produto, Buss (2022) ao examinar documentos oficiais, realizou um estudo sobre trabalhos envolvendo tal produto no Google Acadêmico e partir das raízes etimológicas do termo, faz uma primeira tentativa de conceituação sobre qual deveria ser sua função, seu sentido e significado. De imediato identificamos em tal perspectiva os propósitos que tínhamos em mente.

Isto é, queríamos propor um produto obtido através de um processo de influência recíproca ou dialógica com outros docentes, de forma que todos pudéssemos produzir seus significados, simultaneamente, e que tal produto pudesse ser testado e aplicado em um ambiente real de ensino e aprendizagem, que deveria

> [...] ser conceitual, instigante, rico em exemplos, de modo que entrelaçasse conceitos de outras disciplinas ou áreas. Precisaria trazer possibilidades de capacitar e de subsidiar os(as) professores(as) no quesito conhecimento, sugerindo ações que permitam que tais conteúdos sejam colocados em prática pedagógica, seja essa curricular ou extracurricular (Buss, 2022, p. 1012).

A ideia é a de que os colegas docentes encontrem uma abordagem mais aprimorada do conteúdo do que as encontradas em livros didáticos, oportunizando, através de uma apresentação organizada objetivamente, tanto uma fonte de consulta e estudo, quanto de inspiração (Buss, 2022).

5.5 Procedimentos metodológicos

O primeiro procedimento metodológico consistiu na elaboração de um Texto de Apoio aos professores de Ensino Médio (produto educacional do Mestrado

Profissional realizado pelo pesquisador da presente pesquisa) que estivessem interessados em participar deste estudo, como sujeitos-pesquisadores, conforme a modalidade da pesquisa. A versão inicial deste Texto foi disponibilizada às participantes apenas como ponto de partida e, por isso, denominada “Versão Preliminar do Texto de Apoio” (disponível no Apêndice 3 desta dissertação), uma vez que durante a pesquisa o grupo poderia contribuir com sugestões para a validação deste produto educacional, qualificando-o em seu conteúdo final.

Na primeira fase metodológica – de planejamento – tendo as participantes aceitado o convite, os passos seguintes foram a criação de um grupo de whatsapp para intercâmbio de informações relativas à pesquisa e a aproximação entre pesquisador e a Instituição na qual a aplicação do produto educacional ocorreu, a fim de conhecer tanto o ambiente quanto as participantes. No entanto, por influência da possibilidade de vendaval no dia 14/07/2023, o encontro ocorreu online, entre 10h30 e 11h30. Na ocasião, foram realizadas as devidas apresentações, feitos os esclarecimentos sobre os propósitos e as etapas da pesquisa, combinada a data de envio da Versão Preliminar do Texto de Apoio para a análise das participantes (24/07/2023) e, ao final do encontro, fixados local, data e o horário para a continuidade da primeira fase da pesquisa. Nesse ínterim, as participantes assinaram os termos de consentimento livre e esclarecido – (TCLE) (Apêndice 1) e de autorização para gravação de voz e transcrição de diálogo e relato (Apêndice 2).

Na data aprazada, 10/08/2023, reunimo-nos novamente online das 20h30min às 21h50min. Pesquisador e orientador pediram licença para acionar a gravação de imagem e voz feita através do software Movavi – 1º procedimento de coleta – e deu-se continuidade à fase inicial deste estudo através da primeira Roda de conversa.

Com relação aos procedimentos dessa 1ª Roda de Conversa é necessário que se façam duas importantes ressalvas. A primeira delas é que realizar uma Roda de Conversa no formato *online* demandou certos cuidados, tais como: a verificação de que todos teriam boa conexão à internet, de que todos teriam um aparelho compatível com a plataforma escolhida para a gravação, de que todos teriam um ambiente propício ao encontro, sem interferências externas durante a Roda de Conversa e que a disponibilização da gravação aos participantes não demandaria de tutorial algum para o acesso a gravação. Tudo isso com vistas a criar um ambiente o mais leve e discontraido possível, o que de fato ocorreu, e a Roda *online* mostrou-se uma opção satisfatória para reunir os(as) pesquisadores(as) envolvidos e proporcionar reflexões salutares aos propósitos da pesquisa.

A segunda, é que até a semana anterior à primeira reunião com as participantes da pesquisa, pretendíamos disponibilizar a Versão Preliminar do Texto de Apoio só após o término dessa Roda, porque estávamos mais interessados em diagnosticar a experiência pregressa das docentes-participantes quanto ao tema da pesquisa.

Entretanto, percebeu-se que viabilizando a Versão Preliminar do Texto de Apoio às participantes com antecedência, enriqueceríamos os diálogos da Roda e poderíamos ainda disponibilizar sua gravação às participantes, fornecendo maior subsídio aos seus planejamentos. Por consequência, a validação do produto educacional seria beneficiada em consistência, o que de fato ocorreu.

Essa decisão repercutiu em todas as fases da pesquisa, mas em particular na escolha das reflexões fomentadoras dos diálogos das Rodas de Conversa, que acabou sendo muito ampliada.

A primeira Roda de Conversa tinha como perspectiva apenas o esclarecimento às participantes de que durante a Roda seriam feitas algumas perguntas geradoras dos diálogos, mas que estas participantes poderiam contribuir com as questões que lhes interessassem, espontâneamente.

Portanto, o desenvolvimento da Roda havia sido pensado apenas a partir de três questões: 1) Quais suas práticas habituais quando abordam os logaritmos?; 2) Em algum momento de suas formações vocês tiveram contato com a História da Matemática aplicada ao ensino?; 3) De que modo uma proposta envolvendo aspectos culturais poderia contribuir com o aprendizado do conteúdo?

Já o fechamento da Roda de Conversa dependia das questões geradoras de diálogos envolvidas no desenvolvimento, pois, segundo Warschauer (2017c), as “reflexões do fechamento” da Roda de Conversa devem abranjer registros individuais e coletivos sobre pontos trabalhados por intermédio dessa heurística; no entanto, eles não têm o sentido de conclusão, já que os efeitos das questões discutidas podem e devem ocorrer mais tarde, através da maturação do que foi partilhado e da consequente elaboração do seu significado por parte de cada componente do grupo, sendo tais produtos retomados naturalmente no decorrer de encontros subsequentes. Assim, como as reflexões do desenvolvimento da 1ª Roda de Conversa foram bastante ampliadas, isso naturalmente repercutiu também em seu fechamento.

Deste ponto em diante, vamos designar as participantes pelas letras A e B, a fim de preservar suas identidades. Na segunda fase – de ação – cada participante desenvolveria em suas turmas o planejamento construído de acordo com o perfil específico da turma, porém, a participante B, foi convocada pela Instituição a realizar um curso de formação continuada e não pôde aplicar a pesquisa em sala de aula, ainda assim participou da 2ª Roda de Conversa. Na medida em que a participante A aplicava as atividades em suas turmas, ela enviava relatos pelo whatsapp (textos e aúdios) – 2º procedimento de coleta – contendo narrativas da aplicação.

Na terceira fase – de reflexão – após os envios dos relatos anteriores, feitos a cada aplicação, a participante A enviou um último relato (também via whatsapp) contendo uma síntese ou impressão geral sobre a proposta, o conjunto das aplicações e seus efeitos mais imediatos. Essa fase continuou até boa parte da 2ª Roda de conversa, presencial, ocorrida em 11/10/2023 às 13h30min na própria Instituição onde as participantes lecionavam, ocasião na qual utilizou-se de celulares para a gravação do áudio – 3º procedimento de coleta –. Seu desenvolvimento havia sido pensado a partir das seguintes questões: 1) Qual foi a contribuição do Texto de Apoio sobre logaritmos para os planejamentos de vocês? 2) Quais seriam as sugestões de vocês quanto à possíveis melhorias no Texto de Apoio? 3) Com base nas atividades desenovlidas em sala de aula, o que teriam feito de forma diferente?

Entretanto, com a nova perspectiva dada a primeira fase da pesquisa – pela antecipação de disponibilização da Versão Preliminar do Texto de Apoio – a fim de validar o produto educacional de modo mais consistente, esse esboço primitivo de planejamento da segunda Roda também foi expandido.

Na quarta fase – de replanejamento – que concentrou-se na etapa final da 2ª Roda de Conversa, foram aventados novamente os efeitos das atividades propostas e os possíveis aprimoramentos na estrutura da Versão Preliminar do Texto de Apoio.

A validação do produto educacional desta pesquisa ocorreu em duas etapas:

1ª) teórico/prática – através do exame da Versão Preliminar do Texto de Apoio por parte da docente que o implementou em suas turmas (participante A), inicialmente, elaborando seu planejamento e, logo após, analisando os seus efeitos em sala de aula;

2ª) teórica – durante a segunda fase da pesquisa houve uma potencialização do Texto de Apoio, pois, enquanto a participante A estava em sala de aula, ao pesquisador foi facultada a maturação de possíveis aperfeiçoamentos, que foram sendo planejados na medida em que os relatos da participante A eram enviados e a Revisão de Literatura estava sendo desenvolvida, de forma paralela. Ambas participantes foram sondadas sobre algumas dessas possibilidades de aprimoramentos durante a 2ª Roda de Conversa.

Após a obtenção dos dados brutos por meio de todas as coletas, os mais relevantes foram triados, elencando não só as perguntas norteadoras das Rodas de Conversas mas também trechos das respectivas respostas e diálogos, assim como dos áudios e textos enviados por whatsapp; tendo por critério a possibilidade de explorá-los inicialmente em relação à revisão de literatura e aos referenciais teóricos deste estudo e, logo após, nas considerações finais, confrontá-los com o nosso problema de pesquisa.

Após esse filtro, os dados foram digitados ou copiados no arquivo de edição de texto desta pesquisa direto no capítulo 6 (Resultados e Discussão), onde gradualmente foram sendo organizados segundo os critérios de exploração e confronto descritos no parágrafo anterior. Nesse processo, foram analisados qualitativamente; isto é, a partir da descrição e interpretação detalhada dos hábitos, atitudes e tendências de comportamentos, situando assim a profundidade do exame em seu conteúdo psicossocial.

6. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Neste capítulo são apresentados os resultados da pesquisa em quatro seções, correspondentes a cada uma de suas fases, e em seguida, dentro da própria seção, tais resultados são discutidos. É importante ressaltar que um pouco antes da data prevista para aplicação em sala de aula, a participante B foi convocada a realizar outra atividade e não pôde aplicar o produto em suas turmas, conforme já esclarecido na seção 5.5, no entanto, ela pôde contribuir durante a segunda Roda de Conversa. Assim, apenas a participante A esteve presente na fase de ação da pesquisa.

6.1 O planejamento – 1ª Roda de Conversa

Após nos reunirmos online (pesquisador, orientador e participantes), na sala de reuniões do Google Meet, o orientador solicitou verbalmente a permissão para gravar o áudio e iniciamos os diálogos:

> Pesquisador: O tempo disponibilizado para vocês examinarem a versão preliminar do Texto de Apoio foi suficiente?
>
> Participante B: Sim,sim...
>
> Participante A: Sim, foi um tempo bem..., foi um tempo..., até bastante tempo..., até achei que ia ser menor!..., deu para ver bem...
>
> Pesquisador: Quais as práticas habituais de vocês quando abordam os logaritmos?
>
> Participante B: Bom, eu atualmente estou trabalhando com os segundos anos, mas trabalhei bastante com os primeiros onde tá o conteúdo de logaritmo, e eu trabalhei direto..., aplicação de fórmula sem muita contextualização, até porque eu não sabia como fazer isso né..., então era ali..., aquela receitinha de bolo e vai..., e vamos para as propriedades e foi se embora..., bem diretão assim, sem muita coisa.
>
> Participante A: Eu também, trabalhei da mesma maneira..., sempre defini exponencial, trabalhei exponencial e aí quando eu vou ensinar log eu digo que é o inverso e aí já taco as propriedades, explano as propriedades ali né..., e dou os exercícios, sempre da mesma maneira.
>
> Pesquisador: Em algum momento da formações de vocês, vocês tiveram contato com a História da Matemática aplicada ao ensino?
>
> Participante B: Eu tive dois professores em História da Matemática: um foi a professora X..., ela fez a gente apresentar seminários privilegiando a História do Cálculo aonde a gente ia pro quadro e precisava fazer as demonstrações, então essa parte de História eu não tive muito..., aí ela se aposentou e veio o professor Y, ele é mais ligado ao estudo da

Geometria..., mas a questão da História da Matemática na minha formação foi apenas assim, nessa disciplina..., eu tive professores ligados a Educação que contavam um pouquinho da História da Educação Matemática..., mas, pensando no conteúdo matemático, como tu tá fazendo nos logaritmos, por exemplo, pesquisando na História do logaritmo..., isso eu não tive assim na universidade.

Participante A: Eu também não tive na minha formação, tanto que pra mim, eu vou te ser bem sincera, tudo que eu li no teu trabalho é novidade, porque do jeito que eu ensino foi o jeito que eu aprendi sabe?!..., eu também li mais textos sobre a Educação Matemática e quando eu fiz a disciplina de História da Matemática, eu fiz com o professor Z e ele sempre propunha muito debate..., a gente lia um texto que falava na educação no Rio Grande do Sul e um outro texto que falava na educação no Paraná..., um grupo defendia a educação no Rio Grande do Sul e o outro a do Paraná e assim ele foi trabalhando ao longo do semestre, mas da maneira que tu fez ali..., eu nunca estudei na graduação, então pra mim tá sendo tudo novidade, tô adorando!

Pesquisador: Qual foi a impressão geral de vocês sobre a versão preliminar do Texto de Apoio?

Participante B: Eu sou ligada a área da Educação né..., e quando eu comecei a ler cada tópico que tu separou ali como subtítulo, eu pensava: não..., só um pouquinho..., porque, claro, eu não tou acostumada a “ler Matemática desse jeito”, então..., em cada tópico eu parava: só um pouquinho..., volta, vamos tentar entender..., ah..., que legal...! Que interessante! Nunca tinha pensado desse jeito! Tem um momento que tu faz ali uma relação de P.A. e P.G., e aí eu pensei: nossa que legal! Então, assim, foi um trabalho muito legal de ler..., me provocou um troço! Não..., só um pouquinho..., não dá para ler as 20 e poucas páginas corridas como eu imaginei..., mas é um assunto muito interessante!

Participante A: Eu tive a mesma impressão..., sabe assim quando começa a significar pra ti?! Tipo..., eu comecei a olhar e aí eu voltava no texto: como que eu nunca pensei nisso?! Porque que eu nunca fui pesquisar, sabe?! Aí eu fiquei pensando nos meus alunos..., daí quando eu fui lendo: nossa! Tudo começa a fazer sentido né..., e aí eu só pensando: meu Deus, coitados! Daí, não tem como tu não pensar, por exemplo, em quais outros conteúdos eu to traumatizando eles?! E..., pelo menos eu, não conhecia a História, sabe?! Então, pra mim era assim: veio essa definição porque alguém criou assim... e é isso... e ponto!

Pesquisador: Após examinarem a versão preliminar do Texto de Apoio, vocês acham que uma proposta como essa, envolvendo a História da Matemática, pode contribuir com o aprendizado do conteúdo?

Participante B: Super dá para aplicar e super dá para os alunos tirarem proveito disso, porque a dúvida que eles sempre têm é: quem inventou isso? O quê que a criatura que inventou isso tava pensando? Tava pensando em facilitar a vida! Porque isso é criar estratégias para não passar tanto trabalho no futuro! Então, eu acho que isso traz um pouco mais de sentido pros alunos, em ver essa parte da História da Matemática. Claro que tem coisas ali que não dá para trabalhar com os alunos, mas mostrar para eles: olha só, como seria feito esse cálculo se não tivesse sido criado..., imagina fazer isso sem calculadora! É bom trazer um pouco dessa contextualização, de vez em quando dá uma pitada de contextualização, mostrar algumas coisas..., eu acho que desperta maior interesse dos alunos do que tu tá só colocando definição atras de definição..., propriedades...,

> enfim..., eu acho que dá uma aproximada no conteúdo pra eles..., é interessante!
>
> Participante A: O teu trabalho é bem como a colega falou, começa a significar, sabe?! Aí tu pensa: quanto trabalho eles passavam! E dá pra dizer isso também para os alunos, porque as vezes eles reclamam né: ah que saco ter que resolver isso! Tá, tu tá dizendo que saco, mas olha o quanto já tá simplificado em vista do que era antigamente!
>
> Pesquisador: Vocês pretendem aplicar as atividades integralmente, selecionar algumas delas ou planejam modificações em certas atividades?
>
> Participante B: Como eu sou professora do segundo ano e tem essa questão do conteúdo extenso de Matemática, eu to pensando em usar a atividade 1 e a 2, que eu acho interessante ali..., que tu traz o fato do aluno fazer o cálculo manualmente ali e depois ele comparar o ganho, a facilidade que teve alguém parar, estudar isso e montar aquelas tabelas ali, que facilitam bastante. Como eles são alunos do segundo, mais a título de curiosidade..., mostrando pra eles que assim como nos logaritmos isso acontece, em outros conteúdos também!
>
> Participante A: Eu tenho uma turma que têm três laudos. Nessa turma, eu vou pegar mais leve. Então, eu não vou trabalhar todas as atividades nessa turma, provavelmente eu vá usar mais a 2, mas nas outras turmas eu pretendo usar na integra, até pra instigar eles, sabe?! E tem uma turma que eu posso tá botando muita expectativa neles, a 103, que eu ainda penso, antes de introduzir o teu material, ainda penso em pedir pra eles na minha última aula de exponencial, pra eles pesquisarem log..., pra ver o que eles vão encontrar do conteúdo, sabe?! Pra poder aproveitar mais o teu material..., no sentido do que tu traz de contextualização histórica, porque eu não sabia! Então, eu ainda pretendo fazer isso com essa turma, porque eles são..., dos 4 primeiros anos que eu tenho, eles distoam, sabe?! Eles são alunos que tão sempre te pedindo mais!

Pelo fato da participante B ter a intenção de aplicar apenas as duas primeiras atividades em quatro turmas do segundo ano, foi necessária uma sondagem mais específica:

> Pesquisador: Se tu tivésses turmas de primeiro ano, aplicarias o material integralmente?
>
> Participante B: Eu aplicaria. De repente eu iria pincelando ele em alguns momentos assim..., mas eu aplicaria ele todo, e traria um pouco da contextualização histórica que tu traz ali..., acho que dá pra, em alguns momentos, ir colocando ali..., e eu adorei o material porque ele é objetivo, ele é bem prático de tu pensar em sala de aula. Se tu tens mais tempo, bom..., aí tu podes te deter àquela parte histórica ali que tu traz no início, se não, tu podes ir direto para as atividades, tá bem separado, então eu achei bem boa essa organização, porque aí tu preparou o material pro professor e o professor escolhe! Então, eu gostei bastante do jeito que vocês organizaram o material, achei que é bem fácil de nós, professores, que estamos trabalhando em várias escolas ao mesmo tempo pra dar conta..., de trazer esse material para a sala de aula, achei bem objetivo e prático pra quem tá correndo no dia a dia!

Pesquisador: Particularmente, em relação ao tema da quarta atividade, mantissa, será que não foi uma escolha inapropriada? Vocês acharam coerente?

Participante B: Eu acho assim óh: isso vai variar de turma pra turma, porque daqui a pouco tu não vai conseguir aplicar em todas, mas daqui a pouco, como disse a colega, que numa turma ela tá com expectativas altas, é interessante trazer! Pensando na organização duma prova, dum livro, tu traz questões mais fáceis e questões mais difíceis e dependendo da turma tu opta por botar essa questão mais difícil ou não, mas eu acho interessante tu ter trazido ali: óh..., tem uma coisa um pouquinho mais delicada..., e aí o professor decide se aborda ou não em sala de aula. Então eu acho que ela não tá demais ali, derrepente em muitas turmas não dê para aplicar, mas eu gostei, eu achei bem boa!

Participante A: Eu gostei também! Eu acho que a 4, ela ti instiga..., porque quando eu to dando o conteúdo pra eles eu sempre começo assim: eu não levo "muita coisa difícil" porque..., por exemplo, agora na quadrática, tá... relembrei toda aquela questão da Bháskara e tudo mais, aí agora eu to levando questões que já caíram no PAVE pra eles verem, aí..., chega ali..., eles se apavoram! Então, eu compararia essa tua 4 com uma questão mais elaborada, sabe?! Aquela que vem lá no PAVE, aquela que vem lá no ENEM, que tu tem que pensar um pouquinho mais..., eu não vou levar as quatro no mesmo dia. Eu vou ir instigando eles ao longo das aulas pra eles irem fazendo a atividade, e aí..., realmente, quando chegar na quarta atividade, eu vou lançar pra eles como se fosse um desafio..., pra vê tipo: como eles resolveriam? Qual abordagem eles tomariam? É dessa forma que eu to pensando em trabalhar com eles.

Pesquisador: Após o pesquisador relatar que a característica do logaritmo de um número pode ser reconhecida pelo expoente de sua notação científica e que isso poderia suavizar a quarta questão, sugeriu-se que as participantes poderiam fazer tal modificação. Em razão da surpresa geral, o orientador levantou a possibilidade de explorar o material mais detalhadamente também durante uma formação continuada, tendo em vista o curto espaço de tempo para ministrar alguns conteúdos tais como os logaritmos; ao que ambas as docentes acenaram positivamente e a participante B ainda complementou:

Participante B: E além disso, tem a falta de tempo que a gente têm para pesquisar também! Claro, tem o tempo que a gente têm em aula com o aluno, mas que tempo a gente têm para procurar essa informação? Porque, como vocês mesmo disseram, não foi fácil de encontrar essas informações..., imagina! E vocês se dedicaram por um tempo à isso..., imagina um professor em sala de aula, tendo que preparar aula, tendo que corrigir, tendo que dar conta de tudo..., e sentar para procurar esse tipo de coisa, que vocês mesmos relataram que é difícil! Então, tem esses dois lados né: falta de tempo para procurar essas informações e falta de tempo para aplicar com os alunos porque a gente tá sempre correndo...

Encaminhamos o fechamento da Roda de Conversa a partir da retomada do relato de uma das participantes de que pediria à uma de suas turmas para fazer uma busca na internet sobre a invenção dos logaritmos antes de aplicar as atividades do Texto de Apoio, o que oportunizou as duas reflexões finais:

> Pesquisador: Vocês acham que alguns daqueles trechos teóricos relativos à descrição histórica da origem dos logaritmos poderiam ser disponibilizados para os alunos?
>
> Participante B: É, assim óh..., como eu disse..., como eu to com os segundos anos, eu não vou utilizar essa parte histórica, mas se eu tivesse com os primeiros anos eu utilizaria ali sim..., a parte histórica, alguns trechos ali eu trabalharia sim com os alunos.
>
> Pesquisador: No caso de propor aos estudantes que pesquisem algo sobre o tema, vocês acham que seria possível disponibilizar alguns pontos que por eles devam ser observados, com base no material de apoio?
>
> Participante B: Eu acho que a gente precisa direcionar essas perguntas. Por exemplo, montar um esqueminha de pesquisa para eles como quase um questionário tipo..., sei lá: quem inventou? Foi só uma pessoa que inventou? Meio que direcionando eles a pesquisar, porque se tu deixar no geralzão..., eles vão naquelas primeiras coisas ali no google e deu! Eu acho que tu precisa direcionar. Eu fiz uma vez um trabalho sobre grandezas e a primeira vez que eu fiz o trabalho foi tipo: pesquisem sobre grandezas bah, bah, bah..., não saiu nada do que eu pretendia! Na segunda vez, no segundo ano que eu apliquei esse mesmo trabalho, eu já fui elencando várias perguntas que eu queria que eles respondessem e dizia pra eles: eu não quero que vocês me respondam como um questionário. Montem um texto onde vocês respondam estas perguntas que eu estou fazendo. Porque se deixar meio no geralzão, eles não vão se questionar sobre isso: mas foi uma pessoa que criou mesmo? Um ser iluminado que teve a grande ideia! Claro, pensando com calma pra não fazer perguntas tão diretas onde eles possam responder apenas sim ou não, e direcionando eles pra pesquisa.
>
> Participante A: Eu acho que sim, porque aí depois dá pra pegar o teu material, ali onde tu traz a invenção dos logaritmos e “confrontar” com o que eles pesquisaram, pra ver o quê que a pesquisa deles contribui e o quê é que a gente pode contribuir para eles! Daí também não vai ficar aquela coisa assim: ah... saiu do nada!

No momento em que a roda de conversa já se encaminhava para seu término houve ainda uma manifestação espontânea adicional:

> Participante B: Só uma coisa: eu tenho mestrado e eu penso em fazer doutorado, só que a minha dúvida é sempre o quê pesquisar? E lendo o teu trabalho eu pensei: porque não pegar algum outro conteúdo e tentar pesquisar essa questão histórica desse conteúdo, sabe?! Me dispertou a curiosidade: logaritmo é assim, tá, e os outros conteúdos?

Tendo percebido que os dados já eram satisfatórios para a fase de planejamento da pesquisa, demos por encerrada a primeira Roda de Conversa. Após reforçarmos que os dados relativos a fase de ação deveriam ser espontâneos e enviados por whatsapp, nos despedimos cordialmente das participantes e agradecemos a disponibilidade das mesmas.

A seguir, será realizada a discussão desses resultados à luz dos referenciais teóricos adotados e dos trabalhos apresentados na Revisão de Literatura.Os extratos seguintes nos mostram que as participantes costumavam introduzir o conceito de logartimo de maneira tradicional, exclusivamente através da equivalência exponencial que compõe sua definição, embora haja pesquisas articulando História da Matemática e ensino de logaritmos com turmas que já haviam estudado o conteúdo de modo tradicional e que durante o período de sondagem não tenham detectado a percepção de logaritmo como expoente (Galupo, 2021; Pereira; Resende, 2021):

> Participante B: [...] eu trabalhei direto..., aplicação de fórmula sem muita contextualização, até porque eu não sabia como fazer isso né..., então era ali..., aquela receitinha de bolo e vai..., e vamos para as propriedades e foi se embora..., bem diretão assim, sem muita coisa.
>
> Participante A: [...] trabalhei exponencial e aí quando eu vou ensinar log eu digo que é o inverso e aí já taco as propriedades, explano as propriedades ali né..., e dou os exercícios, sempre da mesma maneira.

Analisemos os trechos nos quais as participantes nos relatam sobre o perfil do trabalho em História da Matemática durante a formação de cada uma:

> Participante B: [...] tive professores ligados a Educação que contavam um pouquinho da História da Educação Matemática..., mas, pensando no conteúdo matemático, como tu tá fazendo nos logaritmos, por exemplo, pesquisando na História do logaritmo..., isso eu não tive assim na universidade.
>
> Participante A: [...] a gente lia um texto que falava na educação no Rio Grande do Sul e um outro texto que falava na educação no Paraná..., um grupo defendia a educação no Rio Grande do Sul e o outro a do Paraná e assim ele foi trabalhando ao longo do semestre, mas da maneira que tu fez ali..., eu nunca estudei na graduação, então pra mim tá sendo tudo novidade, to adorando!

Isto nos mostra que existe uma ausência de abordagem histórica do conteúdo de logaritmos na formação inicial de professores de Matemática, ainda que se entenda que esta seja uma abordagem promissora, conforme já relatado na literatura (Mota, 2023; Alves; Silva; Pereira, 2017).

Os próximos extratos evidenciam sob o ponto de vista da Etnomatemática, uma Matemática praticada por diferentes culturas ou distintos grupos sociais (D’Ambrosio, 2005), que ambas as participantes mostraram-se bastante receptivas em relação à articulação entre Etnomatemática e o ensino de logaritmos:

> Participante B: [...] em cada tópico eu parava: só um pouquinho..., volta, vamos tentar entender..., ah..., que legal...! Que interessante! Nunca tinha pensado desse jeito! Tem um momento que tu faz ali uma relação de P.A. e P.G., e aí eu pensei: nossa que legal! Então, assim, foi um trabalho muito legal de ler..., me provocou um troço!
>
> Participante A: [...] sabe assim quando começa a significar pra ti?! Tipo..., eu comecei a olhar e aí eu voltava no texto: como que eu nunca pensei nisso?! Porque que eu nunca fui pesquisar, sabe?! E..., pelo menos eu, não conhecia a História, sabe?!

Além disso, os extratos a seguir atestam que a abordagem apresentada no Texto de Apoio conciliou Etnomatemática e a História da Matemática a ponto de predispor uma repercussão na didática das participantes, pelo fato de proporcionar uma visão mais humanista da Matemática e dos distintos modos de matematizar (Santos; Lara, 2021; Santos; Lara, 2022):

> Participante B: [...] dá para aplicar e super dá para os alunos tirarem proveito disso, porque a dúvida que eles sempre têm é: quem inventou isso? O quê que a criatura que inventou isso tava pensando? Tava pensando em facilitar a vida! Porque isso é criar estratégias para não passar tanto trabalho no futuro! Então, eu acho que isso traz um pouco mais de sentido pros alunos, em ver essa parte da História da Matemática.
>
> Participante A: [...] começa a significar, sabe?! Aí tu pensa: quanto trabalho eles passavam! E dá pra dizer isso também para os alunos, porque as vezes eles reclamam né: ah que saco ter que resolver isso! Tá, tu tá dizendo que saco, mas olha o quanto já tá simplificado em vista do que era antigamente!

Percebe-se ainda, a partir dos extratos a seguir, como característica principal nos planejamentos das docentes, em especial da participante A, a intenção de trabalhar na ZDP do perfil de cada turma:

> Participante B: Como eu sou professora do segundo ano e tem essa questão do conteúdo extenso de Matemática, eu to pensando em usar a atividade 1 e a 2...
>
> Participante A: Eu tenho uma turma que têm três laudos. Nessa turma, eu vou pegar mais leve. Então, eu não vou trabalhar todas as atividades nessa turma, provavelmente eu vá usar mais a 2, mas nas outras turmas eu pretendo usar na integra, até pra instigar eles, sabe?! E tem uma turma que eu posso tá botando muita expectativa neles, a 103, que eu ainda penso, antes de introduzir o teu material, ainda penso em pedir pra eles na minha última aula de exponencial, pra eles pesquisarem log...

Esta intenção de trablhar na ZDP também se mostrou quando questionadas sobre a pertinência da atividade 4 como introdução ao estudo dos logaritmos, ao examinarem e selecionarem atividades situando-as, teoricamente, entre o nível de desenvolvimento real das turmas – aquilo que elas supostamente faziam de modo independente – e o nível de desenvolvimento potencial, aquilo que poderiam fazer com a orientação de um parceiro, um facilitador da aprendizagem (Vygotski, 1991).

> Participante B: [...] isso vai variar de turma pra turma, porque daqui a pouco tu não vai conseguir aplicar em todas, mas daqui a pouco, como disse a colega que numa turma ela tá com expectativas altas, é interessante trazer!
>
> Participante A: [...] eu compararia essa tua 4 com uma questão mais elaborada, sabe?! Aquela que vem lá no PAVE, aquela que vem lá no ENEM, que tu tem que pensar um pouquinho mais..., eu não vou levar as quatro no mesmo dia. Eu vou ir instigando eles ao longo das aulas pra eles irem fazendo as atividades, e aí..., realmente, quando chegar na quarta atividade, eu vou lançar pra eles como se fosse um desafio...

Os próximos extratos nos permitem identificar a percepção, por parte das participantes, dos benefícios de uma segunda concepção de Etnomatemática: os diferentes modos, as técnicas (ticas) de explicar, de conhecer, de entender (matema) a realidade sociocultural (etno) na qual a espécie Homo sapiens está inserida (D’Ambrosio, 2005):

> Pesquisador: No caso de propor aos estudantes que pesquisem algo sobre o tema, vocês acham que seria possível disponibilizar alguns pontos que por eles devam ser observados, com base no material de apoio?
>
> Participante B: [...] a gente precisa direcionar essas perguntas... Eu fiz uma vez um trabalho sobre grandezas e a primeira vez que eu fiz o trabalho..., não saiu nada do que eu pretendia! Na segunda vez, no segundo ano que eu apliquei esse mesmo trabalho, eu já fui elencando várias perguntas que eu queria que eles respondessem e dizia pra eles: eu não quero que vocês me respondam como um questionário. Montem um texto onde vocês respondam estas perguntas que eu estou fazendo.
>
> Participante A: Eu acho que sim, porque aí depois dá pra pegar o teu material, ali onde tu traz a invenção dos logaritmos e “confrontar” com o que eles pesquisaram, pra ver o quê que a pesquisa deles contribui e o quê é que a gente pode contribuir para eles! Daí também não vai ficar aquela coisa assim: ah... saiu do nada!
>
> Participante B: [...] eu tenho mestrado e eu penso em fazer doutorado, só que a minha dúvida é sempre o quê pesquisar? E lendo o teu trabalho eu pensei: porque não pegar algum outro conteúdo e tentar pesquisar essa questão histórica desse conteúdo, sabe?! Me dispertou a curiosidade: logaritmo é assim, tá, e os outros conteúdos?

As participantes apontam características da Matemática como uma Etnociência, ao refletirem sobre novas possibilidades didáticas envolvendo aspectos culturais que circunscrevem a Matemática tradicional (D’Ambrosio, 2005).

6.2 A ação – Envio da maioria dos relatos

A segunda fase da pesquisa iniciou-se a partir do momento em que a participante A colocou seu planejamento em execução e passou a enviar seus relatos a medida em que as atividades transcorriam:

> Relato 1:
> Participante A: Na turma 102, utilizei as atividades 1 e 2. Passamos dois períodos trabalhando, tiveram casos de alunos que ficaram mais de 40 minutos na divisão, deixei eles se reunirem em duplas ou trios. A primeira atividade passei no quadro logo no primeiro período que tivemos pela manhã e não foi o suficiente para algumas duplas conseguirem efetuar a divisão. Agora a tarde tivemos mais um período. Aí, entreguei a folha de caderno deles com as atividades 2 e 3 pra eles. A 2 eles conseguiram resolver, a 3 ficou para segunda-feira. À tarde, a aplicação acabou atrasando por causa da chuva, a gente não teve quase aula essa semana, eles receberam o PROERD, então, acabou atrapalhando o desenvolvimento do conteúdo. Eu apliquei em duas turmas por enquanto, na 102 e na 103, foram as duas turmas que eu já consegui começar a trabalhar com o material. Eu vou acabar utilizando mais períodos do que eu previa em função de algumas dificuldades que estão surgindo.
>
> Relato 2:
> Participante A: Oi, boa tarde, vou fazer o relato por turma, tá? Na 102 eu trabalhei com eles, como eu coloquei ali acima, um período pela manhã e um à tarde, e, quando chegou a tarde, alguns ainda não tinham terminado a atividade 1, letra A, a da multiplicação, porque eles encontraram muita dificuldade e o que eu percebi, em duas duplas, foi que eles estavam esquecendo de colocar a multiplicação! Por exemplo, fizeram a 1ª multiplicação ali..., e na 2ª multiplicação eles deveriam deixar a casa da unidade sem nada e começar a colocar o resultado a partir da dezena, e, na 3ª a partir da centena e assim sucessivamente. E eles esqueceram completamente disso! Por isso, não estava dando certo o resultado! E a atividade 2 eu precisei ir para o quadro e explicar as propriedades de potência porque ali, de maneira genérica, eles não estavam entendendo, porque eu substituía pela potência né..., no caso 16384, substitui por 2 elevado na décima quarta potência e aí eles tinham esquecido completamente! Quando eu substitui o outro número, que no caso ficou 2 elevado a vigésima segunda, eles mantinham as bases e não somavam os expoentes, por mais que aqui na folha que eu imprimi pra eles tivesse de forma genérica eles não entenderam! Aí, eu peguei com números a própria base 2, mas com valores menores, peguei 2 ao quadrado e 2 ao cubo e aí coloquei todas as propriedades de potências pra eles e aí foi..., fluiu, e eu acabei tirando a letra C da atividade 2, porque na atividade 1 raiz foi um caos, sabe?! Aí, como na atividade 1 eu acabei resolvendo a letra C na integra, eu tirei a letra C da atividade 2 pra eles, eu disse: não..., o 2 vocês esqueçam. Porque eu já vi que eles tem muita dificuldade mas não é em relação ao material e sim lá na base, sabe?! Eles não lembram, mesmo tendo visto há pouco tempo atrás, eles não lembram!
>
> Relato 3:
> Participante A: Na turma 103 faltou só a atividade número 4, que eu acabei optando por não passar hoje pra eles, porque não ia dar tempo, porque eu tive 2 períodos também com essa turma, só que eles já foram um pouco

> mais rápidos, mas eu acabei optando por não dar a atividade 4 hoje pra eles, e vamos realizar a atividade 4 na 2ª feira, eu levei ela impressa. Na turma 103 eu acredito que se todos os meus três períodos fossem de 50min teria sido suficiente para fazer as 4 atividades, só que eu acabei pegando um período de meia hora, que no caso seria da 1h20min às 14h, então eles teriam 40min, só que na prática acabou ficando da 1h30min às 14h, porque é o horário que o pessoal está voltando do almoço, então, é bem conturbado esse período, ele é curto, aí acabou não dando tempo de fazer a atividade 4, a gente deixou para segunda-feira encerrar.
>
> Relato 4:
> Participante A: Eu achei super legal a abordagem e, como eu relatei na 1ª roda né..., eu nunca tinha pensado em trabalhar dessa forma e hoje eu ainda falei para eles quando eu passei a atividade 1: gente aqui não tem nada de novidade porque é conteúdo que vocês já viram desde o 3º e 4º anos..., vocês vão basicamente multiplicar, só que a diferença é que não são só 2 parcelas como vocês estavam acostumados, 2 ou 3 parcelas, são mais parcelas na soma final, mas é só isso de novidade! Quando eu passei a atividade 2 pra eles né..., que eles viram que tinha a tabela, principalmente na turma 103, eu achei legal porque eles começaram a falar assim: nossa! Agora tudo faz sentido! Essa tabela veio para facilitar a vida! Porque olha o tempo que a gente perdeu, braçal, e aí olha agora, com a tabela! Então assim, eles mesmos já conseguiram perceber a importância né..., e que ali tinha uma evolução, que era o mesmo conteúdo mas que era de uma maneira mais fácil de resolver a partir do uso da tabela, e aí um dos alunos ainda falou assim: mas eu nunca ia pensar na vida real de transformar um número numa potência pra depois fazer o cálculo! E disse: eu ia sofrer braçalmente! E aí eu achei bem legal essa parte, esse retorno deles! Hoje à tarde eu termino de aplicar com as turmas 101 e 104.

A seguir, daremos continuidade à discussão dos resultados, especificamente dessa 2ª fase, à luz dos referenciais teóricos adotados e dos trabalhos apresentados na Revisão de Literatura. Nos extratos a seguir é possível perceber que a participante A detectou a ZDP dos estudantes nos dois primeiros itens da atividade 1 (vide Figura 2):

Figura 2 – Atividade 1 da Versão Preliminar do Texto de Apoio

Atividade 1: Sem fazer uso de recursos tecnológicos ou de tabelas, observe o tempo total dispendido para realizar as três operações solicitadas a seguir.

a) 16384 x 4194304 =

b) 134217728 : 512 =

c) $\sqrt{68719476736}$ =

Fonte: Autoria própria

> Participante A: [...] trabalhei com eles..., um período pela manhã e um à tarde, e, quando chegou a tarde, alguns ainda não tinham terminado a atividade 1, letra “a”, a da multiplicação

> Participante A: [...] fizeram a 1ª multiplicação ali..., e na 2ª multiplicação eles deveriam deixar a casa da unidade sem nada e começar a colocar o resultado a partir da dezena, e, na 3ª a partir da centena e assim sucessivamente. E eles esqueceram completamente disso!

No caso do item “a” a participante A colocou-se na ZDP através das seguintes instruções:

> Participante A: [...] gente aqui não tem nada de novidade porque é conteúdo que vocês já viram desde o 3º e 4º anos..., vocês vão basicamente multiplicar, só que a diferença é que não são só 2 parcelas como vocês estavam acostumados, 2 ou 3 parcelas, são mais parcelas na soma final, mas é só isso de novidade! (vide Apêndice 3)

No caso do item “b” (vide Figura 2), a participante procurou auxiliar na ZDP dos estudantes com outra técnica, permitindo que eles se agrupassem e fossem os parceiros mais capazes uns dos outros:

> Participante A: [...] tiveram casos de alunos que ficaram mais de 40 minutos na divisão, deixei eles se reunirem em duplas ou trios. A primeira atividade passei no quadro logo no primeiro período que tivemos pela manhã e não foi o suficiente para algumas duplas conseguirem efetuar a divisão.

No item “c” da atividade 1, envolvendo radiciação (vide Figura 2), foi necessária a resolução integral no quadro, pois a participante A constatou que tal atividade estava fora da ZDP dos estudantes, conforme será explicitado logo a seguir.

Já na atividade 2 (vide Figura 3), a participante A alcançou a ZDP dos estudantes através de uma explicação mais simplificada nos dois primeiros itens da tarefa utilizando-se também do quadro e optando por excluir o item “c”, conforme os seguintes extratos

Figura 3 - Atividade 2 da Versão Preliminar do Texto de Apoio

Atividade 2: Observe agora o tempo necessário para nova resolução, realizada em três etapas:

1ª) usando a tabela, substitua cada número envolvido nas operações pela sua potência correspondente;

2ª) aplique uma das seguintes propriedades de potências: $(a^x)^y = a^{x.y}$ ou $a^x : a^y = a^{x-y}$ ou $a^x . a^y = a^{x+y}$ ou $\sqrt[y]{a^x} = a^{x:y}$

3ª) substitua a potência resultante pelo seu valor correspondente na tabela.

Ao final, compare as atividades 1 e 2, quanto ao tempo e a precisão dos resultados encontrados, e resuma suas conclusões.

2^9	= 512
2^{14}	= 16384
2^{18}	= 262144
2^{22}	= 4194304
2^{27}	= 134217728
2^{36}	= 68719476736

a) 16384 x 4194304 =

b) 134217728 : 512 =

c) $\sqrt{68719476736}$ =

Fonte: Autoria própria

> Participante A: [...] E a atividade 2 eu precisei ir para o quadro e explicar as propriedades de potência porque ali, de maneira genérica, eles não estavam entendendo...

> Participante A: [...] Aí, eu peguei com números a própria base 2, mas com valores menores, peguei 2 ao quadrado e 2 ao cubo e aí coloquei todas as propriedades de potências pra eles e aí foi..., fluiu...

> Participante A: [...] eu acabei tirando a letra C da atividade 2, porque na atividade 1 raiz foi um caos, sabe?! Aí, como na atividade 1 eu acabei resolvendo a letra C na integra, eu tirei a letra C da atividade 2 pra eles...

Ou seja, os trechos acima evidenciam que o aprendizado humano pressupõe uma natureza social específica, demonstrando que sobre a orientação de um parceiro que detecte a ZDP, um facilitador, os estudantes são capazes de aprender muito mais (Vygotski, 1991).

Ao analisar o próximo extrato constata-se a percepção da participante A tanto em relação ao caráter motivacional exercido pela articulação entre a Etnomatemática e o ensino dos logaritmos quanto sobre o potencial epistemológico da abordagem, concluindo que a mesma pode promover uma aprendizagem mais significativa e mais compreensiva da Matemática (Angelo, 2014; Bergamim; Trivizoli; Passos, 2022).

> Participante A: [...] eu achei legal porque eles começaram a falar assim: nossa! Agora tudo faz sentido! Essa tabela veio para facilitar a vida! Porque olha o tempo que a gente perdeu, braçal, e aí olha agora, com a tabela! Então assim, eles mesmos já conseguiram perceber a importância né..., e que ali tinha uma evolução, que era o mesmo conteúdo mas que era de uma maneira mais fácil de resolver a partir do uso da tabela, e aí um dos alunos ainda falou assim: mas eu nunca ia pensar na vida real de transformar um número numa potência pra depois fazer o cálculo! E disse: eu ia sofrer braçalmente!

6.3 A reflexão – Último relato e início da 2ª Roda de Conversa

A terceira fase da pesquisa teve início tão logo terminou a fase de ação, através de uma reflexão geral enviada no último relato, que caracterizou-se como uma síntese tanto da fase de ação quanto da proposta Etnomatemática em sí, culminando ainda numa perspectiva de planejamento para o ano seguinte. Essa fase transcorreu deste momento até a primeira metade da 2ª Roda de Conversa:

> Relato 5:
> Participante A: […] Hoje encerrei a aplicação com as turmas e posso dizer que o material me fez refletir muito sobre as minhas práticas. Já percebi que lá no início do ano, quando sempre dou o pontapé inicial com uma revisão de conteúdos, precisarei dar uma atenção a mais para multiplicação e divisão que envolvam números decimais! Só em falar em base 10 eles já se atrapalharam na atividade 4. Em todas as turmas foi o que os alunos demonstraram muita dificuldade. E isso me fez parar para pensar sobre como abordo. Confesso que costumo passar bem rápido só mostrando as operações. Mas pensando especialmente em logaritmos vou fazer um paralelo: ano passado eu passei a definição das regras e os exercícios, fiz avaliação e encerrou o conteúdo. A partir da tua pesquisa esse ano pedi para que eles pesquisassem sobre logaritmos. Todos me trouxeram definição e exemplos. Peguei o teu próprio material e dei uma pincelada, conversei com eles sobre a importância, devido ao pouco tempo não pude me aprofundar muito. Bem, falando dos exercícios, separei em duas partes. Os alunos, em dupla, fizeram as atividades 1 e 2 e depois a 3 e 4, foi preciso todo o tempo auxilio em questão da interpretação nas atividades 2, 3 e 4. A atividade 1 é um pouco desafiadora para os alunos quando eles olham aquele monte de números, como eles falam, pensam que não vão dar conta de calcular. Bom, mas em geral a impressão que tenho é que teu material tem um grande potencial! Ele é leve, as questões não são difíceis como te coloquei as fotos do que os alunos relataram, ele faz algo que nem sempre fazemos que é mostrar que os conteúdos estão interligados, que muitas vezes é possível por meio de um cálculo simples tirarmos o aluno da zona de conforto! Gostei muito da comparação que eles conseguiram fazer a partir das atividades 1 e 2, que é o mesmo exercício de maneira diferente. Só tenho elogios a fazer ao teu material! Espero que em breve outros colegas tenham acesso, e para o próximo ano, se eu continuar com Matemática no 1ºano, pretendo me organizar de forma que eu tenha mais tempo para trabalhar essa parte do conteúdo de maneira que os alunos consigam explorar mais. Só tenho a agradecer pela oportunidade de participar da pesquisa, pois com o passar do tempo vamos nos fechando na nossa caixinha e nos acomodamos, com esse: conteúdo e definição, exercício e avaliação!

Pesquisador: Quem sabe iniciamos essa 2ª Roda de Conversa pelas turmas que tiveram maior dificuldade?

Participante A: A 101 e a 102 foram as que tiveram mais dificuldade, mas o problema não tá no teu produto, ele tá na base, eles já chegam no Ensino Médio com dificuldade né..., só que esses alunos que estão no 1ºano "hoje", que tiveram a Pandemia, eles têm uma dificuldade além! Então, tem momentos que tabuada eles não sabem! Então, por exemplo, ali na atividade 4, que fala em base 10, é "impossível"! Na 102 eu tive que resolver pra eles e explicar bem "passo a passo"..., e aí, o que é que eu percebi: que a dificuldade deles no Médio, não só em logaritmo mas na Matemática em geral, não é o que é novidade e sim a tabuada! É regra de sinais! É de transformar um número em potência de base dez, sabe?! Parece que é algo de outro mundo! E aí, quando tu trazes um problema, junta tudo, junta a interpretação, que eles não têm, e mais a questão do cálculo básico, sabe?! Falando ainda nessa turma..., eu me apavorei, assim óh, eu pedi para eles fazerem a divisão sem nenhum artifício: vocês não podem usar calculadora, tem que fazer "braçal".
- Tá, mas como a gente faz uma divisão com esse monte de número? E não foi "um aluno", sabe?! Daí, eu ainda falei pra eles: gente é a mesma coisa, vocês vão indo aos poucos..., e tinha uns que não lembravam! Aí, eu dizia: ah..., montem a continha de gaiola...
- Tá, mas o que é conta de gaiola?
- Ah..., onde tu mostras o resto. Praticamente eu tive que desenhar, sabe?!

Pesquisador: Quais foram as atividades aplicadas em cada uma das turmas?

Participante A: Na 101 eu apliquei a 1 e a 2, que foi a última (turma) que eu apliquei. Na 102 eu apliquei até a atividade 3, porque a 4 eu nem coloquei pra eles como desafio, eu coloquei no quadro e perguntei pra eles: vocês tem uma ideia de como a gente faz esse exercício? E aí, eles não sabiam! Mas na 103 e na 104 eu trouxe como desafio (atividade 4), sabe?! O mais engraçado é que nas turmas que eles não têm dificuldade, eles tiveram uma postura diferente das turmas que eles têm dificuldade, porque nas que eles têm dificuldade eles dão uma travada e olham para os colegas! Na 101 e na 102, nas duas eles tiveram o mesmo comportamento! Sabe quando um tenta ajudar o outro mas ao mesmo tempo não sabe o que tá fazendo? E eu deixei..., a aula rolando e eu deixei..., vou deixar pra ver até onde vai, né! E, já na 103 e 104, destaco mais a 103 ainda, ali concentrou mais alunos que dominam a Matemática do que a 104, e o curioso é que eles já eram mais a competitividade, sabe?! A conta grande vai dar trabalho, mas eu sei fazer! E aí, tem o tempo! Isso que eu nem coloquei chocolate dessa vez! Eu não queria que eles usassem a calculadora pra não me passarem a perna, né! Então, o que é que eu falei: coloquem o celular sobre a mesa com o cronômetro ligado e eu vou transitar, só que eu não vou ajudar. Só que quando o aluno mais rápido terminou, que foi rápido né! (3min) Me chamou a atenção, sabe?! Aí, eu peguei e disse pra ele: para aí que eu vou tirar uma foto! Porque eu não podia perder aquele momento, né! Aí, eu dizia pra eles: quando vocês pararem o cronômetro vocês me chamem. Todo o tempo eu estava tentando criar estratégias pra que eles não me passassem a perna, pra que eles realmente tentassem fazer, sabe?!

Pesquisador: Quais as atividades aplicadas nas turmas 103 e 104?

Participante A: Todas. Só que a atividade 4 ninguém resolveu, porque eles não lembravam de base 10! Aí, eu resolvi, aí eu até me senti culpada né..., porque todo o início de ano, independente da turma, eu sempre retomo regra de sinal, ah..., potência, radical, essas coisas assim, porque eles vão usar. A potência de base dez esse ano eu trabalhei com eles ali..., só a questão da conversão, sabe?! Um número muito pequeno, como é que eu escrevo em notação científica e as operações, mas foi uma coisa muito rápida, acho que questão de menos de um período, porque eu botei na folha de revisão, então, ah..., isso aqui a gente retoma assim, assim..., aí, o que é que eu pensei: se um não lembra tudo bem, mas dois não lembram, três não lembram, ninguém lembra! O que é que eu fiz de errado?! Eu posso estar errada, mas eu penso que, no geral, como teve a Pandemia e tudo mais..., a gente acabou cortando os conteúdos né..., e aí eu acho que na história de facilitar: ah..., vou trabalhar com número inteiro, eu não sei até que ponto realmente esses alunos viram no conteúdo algo a mais de base 10.

Participante B: Se a gente pensar em Pandemia e em alunos que estavam no Município..., a estrutura do município foi horrível, a gente dava aula pelo whatsapp! No estado demorou a vir o google sala de aula que deu uma ajudada, mas no Município era whatsapp! Como tu explica o conteúdo de número decimal pelo whatsapp pro aluno? Ou com o material impresso? Eu, na Pandemia, dei aula pro sétimo ano. Como eu ensino equação no whatsapp? Eu dei o básico do básico: $2x + 10 = 6$ e aí foi o máximo que eu atingi no sétimo ano! E torcendo que aquilo ali fizesse sentido para eles e eles lembrassem no oitavo ano! No whatsapp tu não consegue aprofundar muito.

Pesquisador: O conjunto das atividades foi motivador para os alunos?

Participante A: Foi, porque desacomodou eles! Tanto os que tem dificuldade quanto os que tem um pouco mais de facilidade, porque os que tem um pouco mais de facilidade, ah..., virou desafio! Os que conseguiam diziam assim: ah..., eu sou o cara né! Eu sou o bambambam da Matemática né! E os outros..., ficavam assim..., um deles me disse: professora eu tinha que ter prestado atenção um pouco mais nas aulas do 4º ano, porque eu não lembro nada de divisão! Não lembro da conta de gaiola! Então, pra ambos foi bem proveitosa a atividade.

Pesquisador: Foi solicitado aos alunos que fizéssem uma pesquisa histórica sobre a origem dos logaritmos?

Participante A: Pois então..., essa parte pra mim foi frustrante, porque eu achei que eles teriam mais autonomia! Eles têm no Médio uma disciplina de Estudos orientados, que é um período justamente que eles usam para estudar! A professora consegue levar eles na informática, coisas assim..., aí eu pedi que eles pesquisassem um pouco sobre a história dos logaritmos, só que eu não dei um roteiro. E aí, eu coloquei assim no quadro: pesquisar sobre logaritmo; aí, eu botei lá assim: onde surgiu, aplicações, definição. No geral foi assim: eles trouxeram a definição de logaritmo tal qual nua e crua como a gente vê todo o ano! Os que fizeram! Porque boa parte não fez, e aí, eu perguntei pra eles: gente, mas porque vocês não fizeram? E eles disseram assim: ah..., professora porque em Matemática o que é que vocês usam? Definição e exercício, definição e exercício, e me quebraram! Porque eles têm projeto de pesquisa, então, eu achei que eles iam pesquisar..., e aí, uma aluna me disse assim: professora, então tu tinhas que ter dado um roteiro!

Pesquisador: Pois é..., vocês lembram que a participante B na 1ª Roda de Conversa comentou ter feito um roteiro em oportunidade semelhante?

Participante B: Eu montei um roteiro naquele trabalho pra facilitar a minha vida na hora da correção, porque eu sou da área da Matemática, não sei avaliar a qualidade de um texto! Tem aquele texto que toca mais, mas...;

> então, eu vou divulgar pros alunos os itens que eu vou avaliar, e aí, eu avisei: eu não quero que vocês me respondam a pergunta como questionário! Criem um parágrafo onde vocês respondam estas perguntas.
>
> Participante A: Eu imaginei que eles fossem juntar os conhecimentos e não deixar em caixinhas! Eu acho que pra eles, Matemática não tem História! Uma coisa que eu falei em aula pra eles: por mais que eles estejam aprendendo como se estrutura uma pesquisa, que tu não podes simplesmente copiar do Google! Isso, não é pra ti passar em Projeto de pesquisa. É pra ti usar em Geografia, em História, em Matemática..., pra ti levar pra vida! Eu deixei eles meio que livres e ninguém atinou o que eu tava esperando!
>
> Pesquisador: Será que essa proposta Etnomatemática poderia ser desenvolvida em outro conteúdo?
>
> Participante A: Poderia. Acho que sim. Acho que faz falta né? Porque, por exemplo, que nem ali..., o que eu achei interessante é que a questão da Etnomatemática tu consegue relacionar com coisas que nos cercam e aí tu vê que a Matemática não é isolada! Quando eles me falaram que o que importa é a definição e o exercício, doeu..., doeu sabe?! Por isso que eu digo que faz falta, que é o que justamente eu te relatei aquele dia: onde vai ficar esse produto? Aonde que mais professores vão ter acesso, sabe?! Porque não digo só logaritmos, mas eu acho que outros conteúdos também..., eu digo pros meus pequenos do 6º ano que por enquanto a raiz negativa vai ficar no imaginário, até o Ensino Médio, que depois eles vão lembrar de mim..., aí eu tô criando uma expectativa neles!

A seguir, daremos continuidade à discussão dos resultados, especificamente dessa 3ª fase. A análise dos primeiros extratos da fase de reflexão nos permite inferir que entre profissionais que não tiveram contato com a História da Matemática aplicada ao ensino de logaritmos pode ocorrer o mesmo fenômeno já observado entre estudantes de licenciatura que, embora comumente não cogitem o uso de História da Matemática para o ensino de logaritmos, admitem que esta é uma metodologia promissora, e que quando adotada, mobiliza fortemente conhecimentos pedagógicos específicos sobre logaritmos (Mota, 2023; Alves; Silva; Pereira, 2017):

> Participante A: [...] pensando especialmente em logaritmos vou fazer um paralelo: ano passado eu passei a definição das regras e os exercícios, fiz avaliação e encerrou o conteúdo. A partir da tua pesquisa esse ano pedi para que eles pesquisassem sobre logaritmos. Todos me trouxeram definição e exemplos. Peguei o teu próprio material e dei uma pincelada, conversei com eles sobre a importância, devido ao pouco tempo não pude me aprofundar muito.
>
> Participante A: [...] percebi que lá no início do ano, quando sempre dou o pontapé inicial com uma revisão de conteúdos, precisarei dar uma atenção a mais para multiplicação e divisão que envolvam números decimais! Só em falar em base 10 eles já se atrapalharam na atividade 4. Em todas as turmas foi o que os alunos demonstraram muita dificuldade.

Os próximos extratos evidenciam que a participante A detectou, entre as quatro turmas nas quais utilizou o Texto de Apoio, duas turmas com perfil de maior dificuldade quanto a compreensão das atividades propostas:

> Pesquisador: Quem sabe iniciamos essa 2ª Roda de Conversa pelas turmas que tiveram maior dificuldade?
>
> Participante A: A 101 e a 102 foram as que tiveram mais dificuldade, mas o problema não tá no teu produto, ele tá na base, eles já chegam no Ensino Médio com dificuldade né..., só que esses alunos que estão no 1ºano "hoje", que tiveram a Pandemia, eles têm uma dificuldade além! Então, tem momentos que tabuada eles não sabem! Então, por exemplo, ali na atividade 4, que fala em base 10, é "impossível"!
>
> Participante A: [...] eu me apavorei, assim óh, eu pedi para eles fazerem a divisão sem nenhum artifício: vocês não podem usar calculadora, tem que fazer "braçal".
> - Tá, mas como a gente faz uma divisão com esse monte de número? E não foi "um aluno", sabe?! Daí, eu ainda falei pra eles: gente é a mesma coisa, vocês vão indo aos poucos..., e tinha uns que não lembravam! Aí, eu dizia: ah..., montem a continha de gaiola...
> - Tá, mas o que é conta de gaiola?
> - Ah..., onde tu mostras o resto. Praticamente eu tive que desenhar, sabe?!

Enquanto nas outras duas turmas a participante A percebeu um perfil oposto aos anteriores:

> Participante A: [...] na 103 e 104, destaco mais a 103 ainda, ali concentrou mais alunos que dominam a Matemática do que a 104, e o curioso é que eles já eram mais a competitividade, sabe?! A conta grande vai dar trabalho, mas eu sei fazer!

O que acabou por se refletir na escolha das atividades que seriam propostas, a fim de que alcançasse adequadamente a ZDP das respectivas turmas (Vygotski, 1991):

> Pesquisador: Quais foram as atividades aplicadas em cada uma das turmas?
>
> Participante A: Na 101 eu apliquei a 1 e a 2, que foi a última (turma) que eu apliquei. Na 102 eu apliquei até a atividade 3, porque a 4 eu nem coloquei pra eles como desafio, eu coloquei no quadro e perguntei pra eles: vocês tem uma ideia de como a gente faz esse exercício? E aí, eles não sabiam! Mas na 103 e na 104 eu trouxe como desafio (atividade 4), sabe?!
>
> Pesquisador: Quais as atividades aplicadas nas turmas 103 e 104?
>
> Participante A: Todas. Só que a atividade 4 ninguém resolveu, porque eles não lembravam de base 10! Aí, eu resolvi, aí eu até me senti culpada né..., porque todo o início de ano, independente da turma, eu sempre retomo regra de sinal, ah..., potência, radical, essas coisas assim, porque eles vão

> usar. A potência de base dez esse ano eu trabalhei com eles ali..., só a questão da conversão, sabe?!

Em relação à atividade 4 (vide Figura 4), percebe-se que a participante A conseguiu torná-la proveitosa para as turmas 103 e 104 na medida em que colocou-se na ZDP dessas turmas, conforme seu planejamento, orientando as atividades não apenas pelo que os estudantes sabiam, mas por conhecimentos que apresentavam-se para eles em fase de amadurecimento (Vygotski, 1991).

Figura 4 - Atividade 4 da Versão Preliminar do Texto de Apoio

Atividade 4: Observe a tabela de logaritmos decimais, visualize-a sob a forma de potências de 10 e calcule o que se pede:

a) $10^{4{,}93296}$ =

b) $10^{2{,}43743}$ =

c) $10^{3{,}94190}$ =

d) $10^{1{,}52235}$ =

x	$\log_{10} x$
8,5696	0,93296
27,38	1,43743
87,478	1,94190
332,931	2,52235

Fonte: Autoria própria

Os próximos extratos reforçam que entre os benefícios de uma proposta Etnomatemática encontram-se tanto a motivação quanto o decorrente aumento de compreensão do conteúdo, que não se restringem aos estudantes, alcançando também os docentes (Angelo, 2014; Bergamim; Trivizoli; Passos, 2022):

> Pesquisador: Será que essa proposta Etnomatemática poderia ser desenvolvida em outro conteúdo?
>
> Participante A: Poderia. Acho que sim. Acho que faz falta né? Porque, por exemplo, que nem ali..., o que eu achei interessante é que a questão da Etnomatemática tu consegue relacionar com coisas que nos cercam e aí tu vê que a Matemática não é isolada!

Entretanto, os extratos seguintes atestam que a participante A não conseguiu colocar-se na ZDP dos estudantes quanto à exploração do contexto histórico-cultural que desencadeou o estudo dos logaritmos, embora a proposta Etnomatemática retire a Matemática de seu isolamento social e mostre-se promissora por proporcionar uma visão mais holística do conhecimento matemático (D'Ambrosio, 2005):

> Pesquisador: Foi solicitado aos alunos que fizéssem uma pesquisa histórica sobre a origem dos logaritmos?
>
> Participante A: [...] eu pedi que eles pesquisassem um pouco sobre a história dos logaritmos, só que eu não dei um roteiro. E aí, eu coloquei assim no quadro: pesquisar sobre logaritmo; aí, eu botei lá assim: onde surgiu, aplicações, definição. No geral foi assim: eles trouxeram a definição de logaritmo tal qual nua e crua como a gente vê todo o ano! Os que fizeram! Porque boa parte não fez, e aí, eu perguntei pra eles: gente, mas porque vocês não fizeram? E eles disseram assim: ah..., professora porque em Matemática o que é que vocês usam? Definição e exercício, definição e exercício, e me quebraram! Porque eles têm projeto de pesquisa, então, eu achei que eles iam pesquisar..., e aí, uma aluna me disse assim: professora, então tu tinhas que ter dado um roteiro!

6.4 Replanejamento – Parte final da 2ª Roda de Conversa

A quarta fase da pesquisa concentrou-se na metade final da 2ª Roda de Conversa pela análise das atividades propostas em relação à sua compreensão por parte dos estudantes, como parte dos critérios de aprimoramentos no Texto de Apoio, embora o início dessa fase possa ser situado durante o processo de revisão de literatura:

> Pesquisador: Será que não houve um certo exagero na quantidade de algarismos envolvidos na atividade 1?
>
> Participante A: Mas o bom é que quando eles foram fazer a atividade 2, aí deu sentido: por que existe a potência? Por isso que ficou interessante, né?! Talvez se tivesse colocado menos algarismos eles não dariam tanto valor a potência como eles deram! Porque me chamou a atenção que eles ainda falaram assim: mas a gente pode trabalhar com potência sempre? Eu disse: sim! Daí, eu acho que foi um trabalho que caiu perfeito porque, o que acontece, eles conseguiram ver o que a gente sempre fala: a Matemática tem uma constância, então, tu precisas lembrar da divisão para trabalhar com logaritmo. E eles ficaram assim: ai sora..., porque que tu não nos disse que podia fazer com potência?! Porque essa era a intenção do exercício! Mostrar né...!
>
> Participante B: Acho que o fator deles passarem um pouquinho de trabalho..., eu acho interessante para eles entenderem: olha só, um dia alguém criou a potência para facilitar a vida! Porque eles sempre..., é aquela coisa: quem inventou isso? Pra que isso? E é um modo prático de mostrar: olha só, alguém sentou e pensou nas propriedades das potências e quanto tempo isso economiza! Não é uma atividade que tu vai fazer todos os dias, tu não vai em todas aulas fazer eles fazerem uma conta daquele tamanho! Mas, eles terem a vivência daquela conta..., lá pelas tantas o aluno vai questionar outras coisas e aí: pois é..., lembra daquela atividade que tu fez, que tu passou um baita tempo fazendo? Por isso que criaram, para economizar tempo!
>
> Participante A: Nas outras turmas houve uma espécie de competição, sabe?! Porque eles gostam, nessa idade né, de competir! E aí ficava aquela coisa: ah, eu resolvi super rápido, porque é uma coisa óbvia! Eu sou o cara!

Porque tem alguns que são ligeiros, claro, é a minoria, mas tem uns que são, sabe?! E aí, eles gostam do desafio! Mas para os que tem mais dificuldade eu iria manter em virtude de poder fazer essas comparações, sabe?! De poder trazer tudo isso: ah..., importância das potências, de que um conteúdo tá sempre “linkado” com outro...; por traz da Matemática sempre tem uma lógica!

Pesquisador: Na apresentação da atividade 2, seria útil direcionar as propriedades para a resolução dos respectivos itens solicitados?

Participante A: Eu acho que sim, pensando nos que tem dificuldade. Na 102 mesmo, eles diziam: mas o quê que é esse “a”? A base né! Aí eu mostrava no quadrinho ali o que é que era a base, o que era o expoente, sendo que eles recém tinham visto exponencial, então teoricamente eles eram pra reconhecer, sabe?! Mas não! A 101 e a 102 são parecidas na dificuldade, então eu apliquei 1º na 102 e tudo aquilo que eu fui vendo que tinha dificuldade eu dei um pouquinho mais facilitado, até porque eu tinha menos tempo. Então, na 101 eu coloquei..., ali onde tinha os “a”, coloquei com base 2, mas botei tudo com expoente baixinho: 2 ao quadrado, dois ao cubo, e mostrando a propriedade, sabe?! Tá..., tiveram algumas dificuldades (101) mas um pouco menos do que na outra (102). Aí, o que é que eu percebi o tempo inteiro? Nessas duas turmas, tudo que tu coloca genérico eles não entendem e tudo que tu coloca um exemplo com número flui melhor! Não sei se não estavam acostumados com esse tipo de questão.

Pesquisador: Em sala de aula, foi utilizado algo sobre a parte histórica do Texto de Apoio?

Participante A: Eu acabei não entrando tanto, em função de que eu dei mais ênfase pras questões, porque a minha ideia era assim: vou pedir pra eles pesquisarem a aí a gente vai discutindo, né..., porque daí, eu queria usar o teu material, sabe?! E aí, no final acabou que eu só dei uma pincelada e acabei levando a conversa pra um outro lado que não dei tanta ênfase pra História, mas sim da importância deles terem essa parte também (histórica), sabe?! Que o conhecimento que a gente tem não é todo em caixinhas, que as coisas vão se encaixando..., e aí, citei as disciplinas que eu achei que eles fossem usar pra fazer a pesquisa! E aí, pelo fator tempo, acabou que eu não consegui explorar tanto quanto eu gostaria.

Pesquisador: Em que momento houve esse diálogo? Antes ou após as atividades?

Participante A: Foi antes, porque o que é que aconteceu? Eu tenho aula na sexta com todas as turmas e eu queria começar a trabalhar o material na segunda, conforme fosse tendo as turmas, né..., e aí, esse tema da questão da pesquisa (solicitada aos alunos) era pra sexta-feira. Aí, acabou que não..., sabe aquele momento de frustração..., eu dei um voto de confiança porque achei que eles tinham uma autonomia um pouquinho maior e não...! Porque se fosse no 1º trimestre tudo bem, mas já estamos no 3º trimestre, então, eu achei que tinham um pouquinho mais de maturidade!

Pesquisador: Será que o efeito poderia ter sido diferente se a pesquisa fosse solicitada após as atividades?

Participante A: Eu acho que sim! Porque daí, como eles saíram da zona de conforto, talvez eles se sentissem mais instigados, porque aí teria que ter tido o que? O roteiro! Então, eu acredito que sim, porque daí eles ficariam mais instigados a fazer.

> Pesquisador: Sempre me chamou a atenção na História da Matemática a presença do termo “rigor lógico”, sem muitas explicações! Como envolve definições, vocês acham que seria útil um 4º apêndice sobre o tema?
>
> Participante B: Acho que ter ali no produto..., eu acho interessante! Porque o professor pode avaliar: pra essa turma eu posso usar esse outro apêndice, mas pra essa outra não. É algo a mais que o professor vai ter de repente pra usar em uma turma e isso já é válido! Eu não me lembro se foi algum veterano da faculdade que me disse: não te preocupa que na faculdade tu aprende na “n–1”, tu aprende cálculo 1 quando tu tá fazendo cálculo 2. E eu acho que isso se aplica em outras coisas também! Talvez esse apêndice..., o professor não use com o aluno, mas vai dar uma base melhor para o professor ter mais segurança pra trabalhar o conteúdo.
>
> Participante A: É..., eu aprendi logaritmo do jeito que a gente acaba dando aula né. Pra mim, quando eu li o teu produto ali..., sabe quando tu fica: quero mais, quero mais, quero mais? Porque era tudo novidade pra mim! Toda parte histórica era novidade! Então, eu acho que pra nós, enquanto professores, independente do que tu vai ensinar pros alunos, mas pro teu conhecimento, sabe?! Quando tu tem curiosidade sobre aquilo, é válido!

Para maior clareza na discussão dos dados desta fase, inicialmente, faremos uma descrição dos aprimoramentos nas atividades da Versão Preliminar do Texto de Apoio, seguida dos critérios que fundamentaram a construção das novas atividades que o aperfeiçoaram.

Os critérios para tais aprimoramentos tiveram por base tanto esta última parcela dos dados, com discussões que envolveram o exame de trabalhos elencados em nossa Revisão de Literatura, quanto alguns extratos das fases anteriores, obtidos nas fases de ação e reflexão e trazidos a tona durante esta segunda Roda de Conversa. Vejamos os primeiros extratos desta fase:

> Pesquisador: Será que não houve um certo exagero na quantidade de algarismos envolvidos na atividade 1?
>
> Participante A: Mas o bom é que quando eles foram fazer a atividade 2, aí deu sentido: por que existe a potência? Por isso que ficou interessante, né?! Talvez se tivesse colocado menos algarismos eles não dariam tanto valor a potência como eles deram! Porque me chamou a atenção que eles ainda falaram assim: mas a gente pode trabalhar com potência sempre? Eu disse: sim!
>
> Participante B: [...] Não é uma atividade que tu vai fazer todos os dias, tu não vai em todas aulas fazer eles fazerem uma conta daquele tamanho! Mas, eles terem a vivência daquela conta..., lá pelas tantas o aluno vai questionar outras coisas e aí: pois é..., lembra daquela atividade que tu fez, que tu passou um baita tempo fazendo? Por isso que criaram, para economizar tempo!

No entanto, dois dos extratos da fase de ação elucidaram tanto a demora de mais de 40 minutos na divisão da Atividade 1 quanto a necessidade de supressão do item C nas atividades 1 e 2 (vide Figuras 2 e 3):

> Participante A: [...] tiveram casos de alunos que ficaram mais de 40 minutos na divisão, deixei eles se reunirem em duplas ou trios. A primeira atividade passei no quadro logo no primeiro período que tivemos pela manhã e não foi o suficiente para algumas duplas conseguirem efetuar a divisão.

> Participante A: [...] eu acabei tirando a letra C da atividade 2, porque na atividade 1 raiz foi um caos, sabe?! Aí, como na atividade 1 eu acabei resolvendo a letra C na integra, eu tirei a letra C da atividade 2 pra eles...

Assim, a participante A sugeriu que ao replanejar a Atividade 1, diminuíssemos a quantidade de algarismos do divisor e suprimíssemos o item C das atividades 1 e 2 (vide Figuras 5 e 6):

Figura 5 - Atividade 1 da Versão Final do Texto de Apoio

Atividade 1: Sem fazer uso de recursos tecnológicos ou de tabelas, anote o tempo total dispendido para realizar as duas operações solicitadas a seguir.

a) 8192 x 1048576 = b) 8589934592 **:** 64 =

Fonte: Autoria própria

Figura 6 - Atividade 2 da Versão Final do Texto de Apoio

Atividade 2: Anote o tempo que levará nesta nova atividade para compará-lo tanto com o da atividade anterior quanto com o da atividade 5, mais tarde.

Agora você resolverá os itens anteriores por um outro método, que consiste em três etapas:

64 = 2^6
8192 = 2^{13}
1048576 = 2^{20}
134217728 = 2^{27}
8589934592 = 2^{33}
549755813888 = 2^{39}

1ª) Usando a tabela acima, substitua cada número envolvido nas operações pela sua potência correspondente;

2ª) Logo após, no item “a” aplique a propriedade $a^x . a^y = a^{x+y}$;

no item “b” utilize a seguinte propriedade $a^x : a^y = a^{x-y}$;

3ª) Por fim, substitua a potência resultante pelo correspondente valor da tabela.

Em relação ao tempo e a precisão dos resultados, qual foi o método mais eficaz?

a) 8192 x 1048576 = b) 8589934592 **:** 64 =

Fonte: Autoria própria

Desse modo, a fim de alcançar uma ZDP mais ampla, que contemple turmas com maior dificuldade, optamos ainda por reaproveitar o conteúdo deste item C na elaboração de uma nova atividade 4, a ser ilustrada mais adiante (vide Figuras 9, 10, 11 e 12).

> Pesquisador: Na apresentação da atividade 2, seria útil direcionar as propriedades para a resolução dos respectivos itens solicitados?
>
> Participante A: Eu acho que sim, pensando nos que tem dificuldade. Na 102 mesmo, eles diziam: mas o quê que é esse “a”? A base né! Aí eu mostrava no quadrinho ali o que é que era a base, o que era o expoente, sendo que eles recém tinham visto exponencial, então teoricamente eles eram pra reconhecer, sabe?! Mas não!

Dois dos extratos da fase de ação, que trouxeram a dificuldade na compreensão da representação genérica de uma propriedade são os seguintes:

> Participante A: [...] E a atividade 2 eu precisei ir para o quadro e explicar as propriedades de potência porque ali, de maneira genérica, eles não estavam entendendo...
>
> Participante A: [...] Aí, eu peguei com números a própria base 2, mas com valores menores, peguei 2 ao quadrado e 2 ao cubo e aí coloquei todas as propriedades de potências pra eles e aí foi..., fluiu...

A participante A sugeriu para o replanejamento da atividade 2 (vide Figura 3), o direcionamento das propriedades de potenciação para a resolução dos respectivos itens solicitados (vide Figura 6), o que também foi adotado na elaboração da nova atividade 4, a ser ilustrada mais adiante (vide Figuras 9, 10, 11 e 12), a fim de alcançar a ZDP de turmas com maior dificuldade.

Não observamos dados na pesquisa que confirmem a percepção dos logaritmos como expoentes. Tal ideia aparece em nossa Revisão de Literatura como a ZDP de turmas que já haviam estudado logaritmos; Isso motivou o replanejamento da atividade 3 da Versão Preliminar (vide Figura 7):

Figura 7 - Atividade 3 da Versão Preliminar do Texto de Apoio

Atividade 3: Tente realizar esta tarefa, inicialmente, com auxílio da tecnologia que preferir. Logo após, se achar necessário, utilize a tabela disponibilizada, visualizando-a na forma de potências.

a) 1048576 x 33554432 =

b) $(32768)^3$ =

x	$\log_2 x$
32768	15
1048576	20
33554432	25
35104372088832	45

Fonte: Autoria própria

A Atividade 3 também sofreu alterações, de modo a aproximá-la com maior clareza do conceito intuitivo de logaritmo enquanto expoente (vide Figura 8); o que norteou também a construção da nova atividade 4 (vide Figuras 9, 10, 11 e 12) (Galupo, 2021; Pereira; Resende, 2021).

Figura 8 - Atividade 3 da Versão Final do Texto de Apoio

Atividade 3: Complete o quadro abaixo com as potências correspondentes a tabela de logaritmos de base 2, conforme a primeira conversão exemplificada:

x	$\log_2 x$
16384	14
524288	19
16777216	24
536870912	29
17179869184	34
274877906944	38

16384 = 2^{14}
524288 =
16777216 =
536870912 =
17179869184 =
274877906944 =

Fonte: Autoria própria

Figura 9 - Atividade 4 da Versão Final do Texto de Apoio

Atividade 4: Observe, inicialmente, o mecanismo de construção da tabela que está na próxima página e, só após, conclua a atividade calculando o que se pede:

1º) Para obter a coluna da esquerda fomos duplicando os valores anteriores, a partir do primeiro.

2º) Para obter os valores da coluna da direita fomos simplesmente adicionando uma unidade aos seus anteriores, a partir do inicial.

Fonte: Autoria própria

Figura 10 - Atividade 4 da Versão Final do Texto de Apoio (continuação)

x	$\log_2 x$
1	0
2	1
4	2
8	3
16	4
32	5
64	6
128	7
256	8
512	9
1024	10

Fonte: Autoria própria

Figura 11 - Atividade 4 da Versão Final do Texto de Apoio (continuação)

2048	11
4096	12
8192	13
16384	14
32768	15
65536	16
131072	17
262144	18
524288	19
1048576	20
2097152	21
4194304	22
8388608	23
16777216	24
....	....

Obs: A palavra sequência implica em ordenação de objetos quaisquer, daí:

1ª) A coluna da esquerda contém um tipo de sequência numérica denominado *progressão geométrica* (P.G.).
2ª) A coluna da direita contém outro tipo de sequência numérica denominado *progressão aritmética* (P.A.).

Foi da comparação e correspondência entre estes dois tipos de sequência que surgiu o estudo dos logaritmos!

→→ Agora, com o auxílio das três etapas descritas logo a seguir, converta em potências **apenas 4 linhas da tabela**, aquelas que sejam necessárias, e conclua a atividade calculando as operações solicitadas:

Fonte: Autoria própria

Figura 12 - Atividade 4 da Versão Final do Texto de Apoio (continuação)

1ª) Substitua cada número envolvido nas operações pela potência equivalente;

2ª) Logo após, no item "a" aplique a propriedade $(a^x)^y = a^{x.y}$;
no item "b" utilize a propriedade $\sqrt[y]{a^x} = a^{x:y}$;

3ª) Por fim, substitua a potência resultante pelo correspondente valor da tabela.

a) $(16)^6$ = b) $\sqrt[3]{2097152}$ =

Em relação ao tempo e à precisão dos resultados obtidos, excetuando-se o uso da calculadora, você conhece outro método mais simples do que este?

Fonte: Autoria própria

Seguindo resultados de pesquisas anteriores, da Revisão de Literatura, para a Versão Final do Texto de Apoio optamos por elaborar a Atividade 5 (vide Figura 13), refletindo com mais ênfase os propósitos originais da invenção dos logaritmos, que na Versão Preliminar do Texto de Apoio foram introduzidos pelas atividades 1, 2 e 3 (vide Figuras 2, 3 e 7); porém, entendemos que ainda era necessário um vínculo mais explícito com os logaritmos, através do contato com as propriedades operatórias antes da formalização do conceito (Oliveira Junior, 2020).

Figura 13 - Atividade 5 da Versão Final do Texto de Apoio

Atividade 5: Com o auxílio da **tabela** e das **propriedades dos logaritmos,** anote o tempo que levará para encontrar os resultados abaixo solicitados.

x	256	8192	32768	16777216	137438953472	49755813888
$\log_2 x$	8	13	15	24	37	39

Depois, compare esse tempo com o que investiu na atividade 2. Qual o método mais rápido?

a) (32768) x (16777216) = c) $(256)^3$ =

b) (137438953472) : (8192) = d) $\sqrt[3]{49755813888}$ =

Fonte: Autoria própria

A análise dos extratos a seguir tanto sugeriu a necessidade de elaboração e inclusão, nas atividades da Versão Final do Texto de Apoio, de um roteiro de busca para o contexto histórico-cultural envolvido na invenção dos logaritmos, quanto indicou a etapa mais pertinente para a solicitação desta atividade. Assim, construímos a atividade 6 da Versão Final do Texto de Apoio (vide Figura 14), a fim de contemplar a ZDP dos estudantes em relação à diversidade cultural, onde estudos apontam residir o potencial criativo da humanidade (D'Ambrosio, 2005).

> Pesquisador: Em sala de aula, foi utilizado algo sobre a parte histórica do Texto de Apoio?
>
> Participante A: [...] no final acabou que eu só dei uma pincelada e acabei levando a conversa pra um outro lado que não dei tanta ênfase pra História, mas sim da importância deles terem essa parte também (histórica), sabe?! Que o conhecimento que a gente tem não é todo em caixinhas, que as coisas vão se encaixando..., e aí, citei as disciplinas que eu achei que eles fossem usar pra fazer a pesquisa!
>
> Pesquisador: Em que momento houve esse diálogo? Antes ou após as atividades?
>
> Participante A: Foi antes, porque o que é que aconteceu? Eu tenho aula na sexta com todas as turmas e eu queria começar a trabalhar o material na segunda, conforme fosse tendo as turmas, né..., e aí, esse tema da questão da pesquisa (solicitada aos alunos) era pra sexta-feira. Aí, acabou que não..., sabe aquele momento de frustração...
>
> Pesquisador: Será que o efeito poderia ter sido diferente se a pesquisa fosse solicitada após as atividades?
>
> Participante A: Eu acho que sim! Porque daí, como eles saíram da zona de conforto, talvez eles se sentissem mais instigados, porque aí teria que ter tido o que? O roteiro! Então, eu acredito que sim, porque daí eles ficariam mais instigados a fazer.

Figura 14 - Atividade 6 da Versão Final do Texto de Apoio

Atividade 6: Faça uma breve pesquisa sobre a origem histórica dos logaritmos e escreva um parágrafo que responda as seguintes reflexões:

a) Foi uma invenção individual ou consequência de uma busca coletiva?
b) Sua invenção foi consequência de genialidade ou de esforço?
c) Qual o significado científico e social do seu surgimento?

Fonte: Autoria própria

A análise dos extratos a seguir revelou significativa dificuldade de compreensão da atividade 4 da Versão Preliminar do Texto de Apoio (vide Figura 4) por parte dos estudantes.

> Pesquisador: Quais foram as atividades aplicadas em cada uma das turmas?
>
> Participante A: Na 101 eu apliquei a 1 e a 2, que foi a última (turma) que eu apliquei. Na 102 eu apliquei até a atividade 3, porque a 4 eu nem coloquei pra eles como desafio, eu coloquei no quadro e perguntei pra eles: vocês tem uma ideia de como a gente faz esse exercício? E aí, eles não sabiam! Mas na 103 e na 104 eu trouxe como desafio (atividade 4), sabe?!
>
> Pesquisador: Quais as atividades aplicadas nas turmas 103 e 104?
>
> Participante A: Todas. Só que a atividade 4 ninguém resolveu, porque eles não lembravam de base 10! Aí, eu resolvi, aí eu até me senti culpada né..., porque todo o início de ano, independente da turma, eu sempre retomo regra de sinal, ah..., potência, radical, essas coisas assim, porque eles vão usar. A potência de base dez esse ano eu trabalhei com eles ali..., só a questão da conversão, sabe?!

Os dados evidenciaram que embora essa atividade tenha sido antecedida de exemplos e os estudantes possam ter apresentado certas defasagens, a abordagem escolhida não foi satisfatória. Daí porque, a fim de alcançar uma ZDP mais ampla, quanto às possíveis dificuldades, reelaboramos essa atividade – que passou a ser a atividade 7 na Versão final do Texto de Apoio (vide Figura 15) –, tornando-a mais intuitiva, tendo por base a sugestão feita às participantes no seguinte extrato:

> Pesquisador: Após o pesquisador relatar que a característica do logaritmo de um número pode ser reconhecida pelo expoente de sua notação científica e que isso poderia suavizar a quarta questão, sugeriu-se que as participantes poderiam fazer tal modificação.

Esta modificação atendeu ainda a algumas demandas indentificadas em nossa Revisão de Literatura, tais como: oportunizar maior mobilização de conhecimentos pedagógicos específicos sobre os logaritmos (Mota, 2023; Alves; Silva; Pereira, 2017); enfatizar diferentes modos de matematizar (Santos; Lara, 2021; Santos; Lara, 2022); e, promover uma aprendizagem mais relevante e efetiva sobre o tema (Angelo, 2014; Bergamim; Trivizoli; Passos, 2022).

Figura 15 - Atividade 7 da Versão Final do Texto de Apoio

Atividade 7: Observe a tabela de potências e complete a de logaritmos:

$1 = 10^{0}$
$2 = 10^{0,301}$
$3 = 10^{0,477}$
$4 = 10^{0,602}$
$5 = 10^{0,699}$
$6 = 10^{0,778}$
$7 = 10^{0,845}$
$8 = 10^{0,903}$
$9 = 10^{0,954}$

x	Notação científica de x	$\log_{10} x$
60		
400000		
3000		
0,05		
0,000007		
0,0009		

Fonte: Autoria própria

Por fim, os últimos extratos desta fase atestaram a necessidade de um apêndice adicional na Versão Final do Texto de Apoio, cuja construção foi norteda pela intenção de um esclarecimento complementar sobre o significado da expressão *rigor lógico*. Adotou-se como pano de fundo o processo de elementarização da Matemática, evidentemente com as devidas proporções de um apêndice (vide Apêndice 4).

> Pesquisador: Sempre me chamou a atenção na História da Matemática a presença do termo "rigor lógico", sem muitas explicações! Como envolve definições, vocês acham que seria útil um 4º apêndice sobre o tema?
>
> Participante B: [...] não me lembro se foi algum veterano da faculdade que me disse: não te preocupa que na faculdade tu aprende na "n–1", tu aprende cálculo 1 quando tu tá fazendo cálculo 2. E eu acho que isso se aplica em outras coisas também! Talvez esse apêndice..., o professor não use com o aluno, mas vai dar uma base melhor para o professor ter mais segurança pra trabalhar o conteúdo.
>
> Participante A: É..., eu aprendi logaritmo do jeito que a gente acaba dando aula né. Pra mim, quando eu li o teu produto ali..., sabe quando tu fica: quero mais, quero mais, quero mais? Porque era tudo novidade pra mim! Toda parte histórica era novidade! Então, eu acho que pra nós, enquanto professores, independente do que tu vai ensinar pros alunos, mas pro teu conhecimento, sabe?! Quando tu tem curiosidade sobre aquilo, é válido!

Entretanto, procurou-se uma visão panorâmica da transição entre a definição de logaritmo apresentada na primeira obra publicada sobre o tema e a definição mais elementar dos dias atuais, tendo em vista que abordagens holísticas admitem a inviabilidade de se atingir o conhecimento final e permanentemente buscam novos entendimentos, a fim de oportunizar reflexões mais amplas e de valor formativo não menos relevante (D'Ambrosio, 2005).

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo desta pesquisa analisamos como um enfoque histórico-cultural pode colaborar na compreensão do conceito de logaritmo no Ensino Médio, suscitando a abordagem da História da Matemática como metodologia, examinando possíveis contribuições da Etnomatemática na introdução ao estudo dos logaritmos e descrevendo a percepção das professoras participantes sobre a relevância da proposta.

O primeiro passo foi elaborar um Texto de Apoio aos professores, a fim de constituir-se um ponto de partida para essa jornada, sem a intenção de que o mesmo significasse uma hipótese de pesquisa, mas sim no intuito de estabelecer uma cooperação com as duas pesquisadoras participantes, uma sinergia; que nos permitisse refletir sobre os propósitos da pesquisa. Essa Versão Preliminar do Texto de Apoio contemplou, basicamente, uma breve história da invenção dos logaritmos e atividades pedagógicas afins, que poderiam ser avaliadas e inclusive reelaboradas pelas participantes da pesquisa antes da sua introdução em sala de aula.

Esta investigação contou com a metodologia da pesquisa-ação, sintetizada sucintamente em quatro fases fundamentais: o planejamento, que transcorreu desde a elaboração e disponibilização dessa Versão Preliminar do Texto de Apoio às participantes, concentrando-se numa 1ª roda de conversa e concluindo-se no momento que antecedeu sua utilização em sala de aula; a ação, na qual uma das participantes utilizou-se dessa Versão Preliminar do Texto de Apoio para introduzir o estudo dos logaritmos em quatro turmas de primeiro ano do Ensino Médio; a reflexão, que iniciou-se tão logo foi concluída a fase anterior e teve seu término durante uma 2ª roda de conversa; e, o replanejamento, que concentrou-se na parte final da 2ª roda de conversa, embora seu início possa ser situado durante o processo de revisão de literatura e seu término no final da pesquisa.

Durante a pesquisa observou-se que as atividades didáticas algorítmicas predominaram sobre aspectos de caráter mais conceitual, ainda que tais atividades tenham dialogado com a História dos logaritmos.

Entretanto, a História da Matemática como metodologia de ensino tem como foco a aprendizagem, e esta esteve permanentemente vinculada à pesquisa. Neste sentido, as participantes exerceram ao longo da investigação os papéis indissociáveis de pesquisadoras e docentes, simultaneamente; na medida em que variáveis importantes envolvidas no contexto das atividades propostas foram precisamente identificadas pelas mesmas, tais como o nível de conhecimento dos estudantes, suas habilidades e suas potencialidades.

Embora os logaritmos sejam abordados após as funções exponenciais e a própria definição envolva uma equivalência exponencial, a pesquisa detectou que a identificação dos logaritmos enquanto expoentes, por parte dos estudantes, nem sempre ocorre, como atestaram estudos de revisão que indicam inclusive ser essa uma das zonas de desenvolvimento proximal para a compreensão do conceito; aspecto que foi enfatizado na Versão Final do Texto de Apoio, elaborada durante a fase de replanejamento.

É oportuno ainda ressaltar que esta pesquisa partiu de uma reflexão primordial bastante ampla: a partir da percepção de professoras de Matemática do Ensino Médio de uma escola do interior do Rio Grande do Sul, de que modo uma contextualização histórico-cultural poderia favorecer a introdução didática da ideia de logaritmo?

Após concluída a pesquisa, é possível afirmar, segundo a concepção das participantes, que tal contextualização deve tentar trazer um pouquinho das mesmas dificuldades gradualmente impostas historicamente para a sala de aula, fazendo com que os estudantes vislumbrem os desafios e as formas de superar esses desafios, os diferentes modos de matematizar, que deram origem ao conhecimento "pronto" que temos hoje.

Segundo as participantes, a pesquisa suscitou nelas uma reflexão sobre suas práticas anteriores ao abordar os logaritmos, oportunizando um olhar mais abrangente e pedagogicamente mais consistente, vislumbrando a História da Matemática como metodologia e fornecendo uma alternativa didática motivadora para a introdução do conceito de logaritmo. Daí porque, acredita-se que a elaboração da Versão Final do Texto de Apoio pode contribuir com o aprendizado de nossos estudantes e com a formação continuada de professores na medida em que potencializa reflexões didáticas mais amplas.

Por fim, através desta pesquisa aspiramos ter contribuído para elucidar alguns aspectos sobre a articulação entre Etnomatemática e a História da Matemática no ensino dos logaritmos, bem como ter fomentado estudos futuros sobre tal articulação, tendo em vista que um número maior de pesquisas nesse campo ainda é necessário. Sugere-se que tais pesquisas: envolvam produção historiográfica com Histórias pedagogicamente vetorizadas; introduzam um caráter mais crítico quanto aos aspectos epistemológicos da interface entre História da Matemática e ensino da Matemática; e que, explorem os potenciais da pesquisa-ação associada tanto a Etnomatemática quanto a História da Matemática aplicadas ao ensino.

8. REFERÊNCIAS

ALVES, V. B.; SILVA, H. F. M.; PEREIRA, A. C. C. A inserção da régua de cálculo circular como ferramenta para o ensino de logaritmo. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, Fortaleza, v. 4, n. 10, p. 48-61, 2017.

ANGELO, C. B. **Cenário da produção acadêmica em história da matemática no ensino de matemática:** uma análise reflexiva das teses e dissertações (1990-2010)**.** 2014. Tese (Doutorado em Educação), Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal – RN. 184p.

BARONI, R. L. S.; TEIXEIRA, M. V.; NOBRE, S. R. História da Matemática em contextos da Educação Matemática: contribuições do GPHM. **Bolema**, Rio Claro, v. 25, n. 41, p. 153-171, dez. 2011.

BERGAMIM, É. G. J.; TRIVIZOLI, L. M.; PASSOS, M. M. Implementações da história da matemática na Educação Básica: o que nos apresentam os anais do Seminário Nacional de História da Matemática sobre essa temática?. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, v. 11, n. 26, p. 105-127, 2022.

BUSS, C. S. O conceito de texto de apoio aos professores enquanto produto educacional dos mestrados profissionais. **Revista Brasileira de Ensino de Ciências e Matemática,** Passo Fundo, v. 5, n. 2, p. 999-1017, jul./dez. 2022.

CAPES. **Base de Teses e Dissertações**. Disponível em: https://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#!/. Acesso em 13 ago. 2023.

CHIZZOTTI, A. **Pesquisa em Ciências Humanas e Socias.** São Paulo: Cortez, 1995.

D'AMBROSIO, U. Sociedade, cultura, matemática e seu ensino. **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v. 31, n. 1, p. 99-120, jan./abr. 2005.

D'AMBROSIO, U. **Uma história concisa da matemática no Brasil.** Petrópolis, RJ: Editora Vozes Ltda, 2008.

EDITORA MELHORAMENTOS. **Michaelis Online**. Disponível em: https://michaelis.uol.com.br/moderno-portugues/busca/portugues-brasileiro/historiografia/. Acesso em 27 mar. 2024.

FAUVEL, J.; VAN MAANEM, J. **History in mathematics education**: an ICMI study. Dordrecht: Kluwer, 2000.

FEITOSA, R. A.; SILVA, I. C. Uma revisão sistemática de literatura acerca dos trabalhos sobre a interface entre ensino e história da matemática. **Amazônia: Revista da Educação em Ciências e Matemáticas**, Belém, v.17, n.38, 2021, p.293-308.

FRIED, M. N. Can Mathematics Education and History of Mathematics Coexist? **Science & Education**, Holanda, v. 10, n. 4, p.391-408, jul. 2001.

GALUPO, A. S. **A construção do conceito de logaritmo.** 2021. Disssertação (Mestrado Profissional), Universidade Federal da Fronteira Sul, Chapecó – SC.102p.

GIL, A. C. **Como Elaborar Projetos de Pesquisa.** São Paulo: Atlas, 2002.

GOOGLE. **Google Acadêmico**. Disponível em: https://scholar.google.com.br/. Acesso em: 01 ago. 2023.

MENDES I. A.; PIRES, L. S. Classificação de teses e dissertações nas subáreas em história para o ensino da matemática (1990-2018). **Revista Paranaense de Educação Matemática,** Campo Mourão, v. 9, n. 19, p. 410-434, 2020.

MIGUEL, A. As potencialidades da história da matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores. **Zetetiké**, Campinas, v. 5, n. 8, p. 73-105, 1997.

MIGUEL, A.; MIORIN, M. Â. **História na Educação Matemática**: propostas e desafios. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

MIORIM, M. Â. **Introdução à História da Educação Matemática.** São Paulo: Atual, 1998.

MOTA, H. G. **Conhecimentos matemáticos para o ensino mobilizados por licenciandos no estudo de tópicos da história da matemática.** 2023. Dissertação (Mestrado em Educação), Universidade Federal de Itajubá, Itajubá – MG, 94p.

LAKATOS, E.M.; MARCONI, M.A. **Metodologia Científica.** 5ª.ed. São Paulo: Atlas, 2011.

________. **Técnicas de Pesquisa.** 9ª.ed. São Paulo: Atlas, 2021.

OLIVEIRA JUNIOR, R. L. Q. O.; Uma introdução didática aos logaritmos de Napier a partir de sua origem histórica. **Cadernos de Educação básica**, Rio de Janeiro, v.5, n.2, p.150-169, 2020.

PEREIRA, D. G.; RESENDE, M. R. Ensino de Logaritmos: um Diagnóstico da Apropriação do Conceito Discutido à Luz da Teoria Histórico-Cultural. **Perspectivas da Educação Matemática**, Mato Grosso do Sul, v. 14, n. 34, p. 1-21, 2021.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas.** Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

PORTELLI, A. Tentando aprender um pouquinho: algumas reflexões sobre a ética na história oral. **Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados de História**, São Paulo, v.15, p.13-49, Abril 1997.

SAITO, F. A pesquisa histórica e filosófica na educação matemática. **Revista Eventos Pedagógicos**, Sinop, v. 9, n. 2, p. 604-618, 2018.

SAITO, F. Construindo interfaces entre história e ensino da matemática. **Ensino da Matemática em Debate**, São Paulo, v. 3, n. 1, 2016.

SAITO, F.; DIAS, M. S. Interface entre história da matemática e ensino: uma atividade desenvolvida com base num documento do século XVI. **Ciência & Educação (Bauru)**, Bauru, v. 19, p. 89-111, 2013.

SANTOS, F. L. M. **A Etnomatemática de Ubiratan D'Ambrosio:** algumas concepções. Palestra do Projeto de Eventos em Educação Matemática, 14 Jul 2022. Disponível em: https://youtu.be/5TSKL_jQUnI. Acesso em: 10 mai. 2023.

SANTOS, J. B. P.; LARA, I. C. M. Articulações entre a Etnomatemática e a História da Matemática:condições de possibilidade a partir de ações pedagógicas. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.24, n.2, p. 465-496, 2022.

SANTOS, J. B. P.; LARA, I. C. M. O Ensino de Logaritmos: uma proposta que articula História da Matemática e Etnomatemática. **Revista Brasileira de História, Educação e Matemática (HIPÁTIA),** São Paulo, v. 6, n. 2, p. 180-196, 2021.

SCOCUGLIA, Afonso Celso. **A história das idéias de Paulo Freire e a atual crise de paradigmas.** João Pessoa: Editora Universitária, 1999.

SOARES, L. J. **Sobre o ensino da matemática.** Pelotas: EDUCAT, 1998.

STRUIK, D. J. **História concisa das matemáticas.** Lisboa: GRADIVA, 1987.

STRUIK, D. J. Por que estudar história da matemática? In: GAMA, R. (Org.) **História da Técnica e da Tecnologia.** São Paulo: EDUSP, 1985.

THIOLLENT, M. **Metodologia da pesquisa-ação.** São Paulo: Cortez, 1985.

________. **Pesquisa-ação nas organizações.** São Paulo: Atlas, 1997.

VIANA, A. R. K. **O Surgimento de um Centro de Estudos Matemáticos em Pelotas-RS na década de 1950.** 2021. Monografia (Especialização em Ciências e Tecnologias na Educação), Instituto Federal Sul-Rio-Grandense – Campus Cavg, Pelotas-RS. 26p.

VYGOTSKI, L. S. **A formação social da mente.** São Paulo: Livraria Martins Fontes Editora Ltda, 1991.

WARSCHAUER, C. **Rodas em rede. Oportunidades formativas na escola e fora dela.** 2ª.ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2017a.

________. **A roda e o registro. Uma parceria entre professores, alunos e o conhecimento.** 5ª.ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2017b.

________. **Entre na roda! A formação humana nas escolas e nas organizações.** 1ª.ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2017c.

APÊNDICES

Apêndice 1 - Termo de Consentimento Livre Esclarecido

PPGCITED

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS NA EDUCAÇÃO

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO – TCLE

Projeto de Pesquisa: Uma abordagem histórico-epistemológica para a introdução do conceito de logaritmo a partir da percepção de professoras de Matemática do Ensino Médio do Rio Grande do Sul

Instituição realizadora da Pesquisa: Instituto Federal de Ensino, Ciência e Tecnologia Sul-rio-grandense

Pesquisadores responsáveis: Almiro Rodolfo Kmentt Viana, Vinicius Carvalho Beck.

Objetivo geral: analisar como um enfoque histórico-cultural pode colaborar na compreensão do conceito de logaritmo no Ensino Médio, tendo por objetivos específicos

Procedimentos a serem utilizados:

A pesquisa será produzida a partir de dados coletados junto às professoras participantes, que responderão a algumas questões em entrevista, e também utilizarão material de apoio produzido pelos pesquisadores, especificamente sobre logaritmos.

Há o comprometimento dos pesquisadores em não divulgar os nomes das participantes desta pesquisa e nem mesmo informações que possam vir a expô-las, garantindo o sigilo e privacidade absoluto de seu anonimato.

Além disso, as participantes da pesquisa terão os esclarecimentos desejados e a assistência adequada, se necessária, antes, durante e após a realização da pesquisa.

Desde já agradeço sua colaboração e atenção frente a pesquisa aqui apresentada.

Pelotas, _____de ________________ de 20___.

____

Nome da particpante da pesquisa (assinatura no espaço acima)

____

Almiro Rodolfo Kmentt Viana

____

Vinicius Carvalho Beck

Apêndice 2 - Termo de autorização para gravação de voz e transcrição de diálogo e relato

PPGCITED

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS NA EDUCAÇÃO

TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA GRAVAÇÃO DE VOZ E TRANSCRIÇÃO DE DIÁLOGO E RELATO

Eu, _____________________________________, autorizo a gravação e transcrição de minha participação em diálogos de rodas de conversa realizadas na escola onde trabalho como docente, e também os relatos enviados por mensagem para os pesqusiadores. Estou ciente de que as transcrições serão utilizadas como dados qualitativos da pesquisa intitulada “Uma abordagem histórico-epistemológica para a introdução do conceito de logaritmo a partir da percepção de professoras de Matemática do Ensino Médio do Rio Grande do Sul”, do Programa de Pós-Graduação em Ciências e Tecnologias na Educação, e autorizo seu uso na íntegra e de trechos selecionados.

Pelotas, _____de ________________ de 20___.

____

Nome da particpante da pesquisa (assinatura no espaço acima)

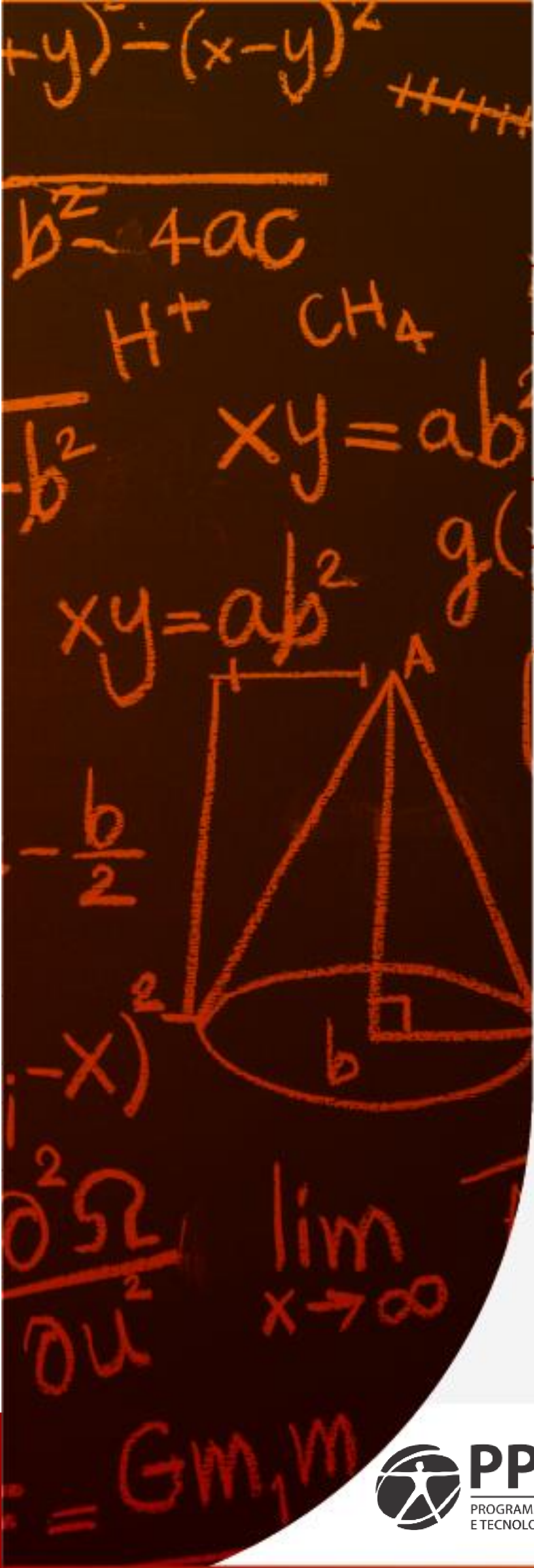
____

Almiro Rodolfo Kmentt Viana

____

Vinicius Carvalho Beck

Apêndice 3 - Versão preliminar do produto



Material de Apoio a Docentes: introdução aos logaritmos através de uma abordagem histórica

Almiro Rodolfo Kmentt Viana

Vinicius Carvalho Beck

PPGCITED
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS NA EDUCAÇÃO

INSTITUTO FEDERAL
Sul-rio-grandense
Câmpus
Pelotas - Visconde da Graça

Ficha Técnica

Autores

Almiro Rodolfo Kmentt Viana
Vinicius Carvalho Beck

Design

Equipe Proedu

Ficha Catalográfica

Sed ut perspiciatis unde omnis iste natus error sit voluptatem accusantium doloremque laudantium, totam rem aperiam, eaque ipsa quae ab illo inventore veritatis et quasi architecto beatae vitae dicta sunt explicabo. Nemo enim ipsam voluptatem quia voluptas sit aspernatur aut odit aut fugit, sed quia consequuntur magni dolores eos qui ratione voluptatem sequi nesciunt.

Este template é uma cooperação entre Proedu (proedu.rnp.br) e PPGCITED

Sumário

1. Apresentação.

Este Texto de Apoio tem por objetivo contribuir com colegas docentes para o aprimoramento de atividades pedagógicas relacionadas a introdução do conceito de logaritmos através de um enfoque histórico; muito embora pretenda disponibilizar reflexões que assegurem a possibilidade de abordagem da História da Matemática no ensino de quaisquer outros conteúdos.

Mas, por que a escolha dos logaritmos e da etapa de introdução?

A simbologia, que tem por fim comunicar conceitos com clareza, elegância e precisão, eventualmente pode revelar-se uma sobrecarga, comprometendo a boa compreensão do conteúdo, podendo ocasionar certa aversão do aluno pela Álgebra, especialmente se a fase introdutória, de conceituação, não for bem encaminhada. É necessário que o estudante perceba, pela própria experiência, que a notação favorece o raciocínio (POLYA, 2006). Em especial, no caso da função logarítmica temos um adicional de vulnerabilidade à simbologia, pois, é bem plausível que uma potência varie segundo a variação do expoente, porém, nem um pouco intuitivo que o expoente dependa da potência!

Daí decorre a necessidade de uma introdução bem mais intuitiva do conceito, investindo um tempo maior do que o habitual, o que nos parece uma boa oportunidade para que o aluno vivencie a necessidade histórica do conceito, ampliando sua compreensão sobre a evolução da Matemática e sua habilidade interpretativa, familiarizando-se assim de modo mais gradual com a simbologia e aproximando-se intuitivamente do significado das propriedades operatórias, antes mesmo de chegar à formalização da definição. Isso, possivelmente, lhe permitirá maior segurança nas etapas mais abstratas do estudo do tema.

Ao elaborar este Texto de apoio nos colocamos na posição de meros colaboradores que compõem uma equipe de trabalho. Se conseguirmos, em conjunto, inspirarmo-nos, bem como inspirar minimamente alguns de nossos estudantes, já nos sentiremos regiamente recompensados. Com votos de boa leitura,

os autores.

2. A invenção dos logaritmos.

O desenvolvimento da computação (ato de calcular) está vinculado ao convívio humano desde os tempos mais longínquos, relacionado diretamente as suas necessidades de sobrevivência

> Entre povos primitivos a computação atendia a duas necessidades primárias. A primeira era a necessidade de enumerações básicas em transações comerciais, tais como a contagem de rebanhos, troca de moedas e partilha de terras. A outra era a necessidade de um calendário pelo qual o homem pudesse manter um registro das estações. "Na ocasião em que as Plêiades começarem a se elevar, comece sua colheita", diz Hesíodo (século VIII a.C.), "e volte a arar quando elas começarem a se pôr. As Plêiades permanecem ocultas por quarenta noites e quarenta dias". O homem, então, voltava os olhos para o céu. O movimento da lua era cuidadosamente medido (DAVIS, 1992, p.1).

Os primeiros habitantes das margens do rio Nilo, também necessitavam observar a época das cheias cujo início coincidia, aproximadamente, com a ocasião em que Sírio surgia junto com o Sol. Nessas primeiras demandas estão situadas as origens mais remotas da construção de tábuas numéricas (DAVIS, 1992).

No entanto, o interesse por tais estudos intensifica-se na Europa, entre os séculos XV e XVII, em razão da influência prática dos muitos campos nos quais os cálculos numéricos eram imprescindíveis, tais como o comércio, a navegação, a astronomia e a agrimensura, havendo uma surpreendente demanda para que eles se tornassem mais rápidos e precisos (EVES, 1992).

Com o acúmulo do capital comercial e emergência da burguesia, no plano socioeconômico, houve a necessidade de ampliação das rotas comerciais, o que se tornou possível, entre outros fatores, pelo impulso de investimentos desta burguesia nos estudos de Astronomia; esta, por sua vez, auxiliava a navegação na busca de novos mercados econômicos, gerando lucros que retornavam e enriqueciam cada vez mais os burgueses (COSTA; OLIVEIRA; LOPES, 2017).

O desenvolvimento econômico do período e as transformações sociais consequentes receberam contribuições culturais denominadas, em conjunto, Renascimento. Este, foi favorecido por uma invenção técnica já conhecida no Oriente: a imprensa; que se expandiu rapidamente, sendo essencial para difundir as obras clássicas e as modernas a um público mais amplo, conhecimento há muito apenas nas mãos do clero (ARANHA; MARTINS, 2009).

No cálculo com frações, por exemplo, que era um problema da maior importância desde a antiguidade, nossos atuais métodos não foram alcançados tão rapidamente. As primeiras obras impressas mostram que apenas no século XVI é que o traço de fração passou a ser adotado e que não era incomum encontrar frações tais como $\frac{3345312}{4320864}$, o que dificultava as operações. O mesmo ocorria na Astronomia onde, até então, as tabelas continham frações sexagesimais, ou seja, o denominador era uma potência de 60 (DAVIS, 1992).

Aos poucos, alguns matemáticos foram constatando que operações com frações tipo $\frac{100012}{100000}$, com potência de 10 no denominador, eram mais simples. No final deste período, em 1585, foi publicado na Holanda um livreto de sete páginas, intitulado “*O décimo*”, que explicava as frações decimais, amenizando um pouco as dificuldades computacionais dos cientistas. Outro livro sobre o tema foi publicado em 1592 na Suíça; e um terceiro em 1603 na Alemanha (DAVIS, 1992).

Um sistema numérico e uma notação adequados são considerados pré-requisitos para a computação; porém, embora o sistema indo-arábico já tivesse sido introduzido na Europa e fosse um elemento facilitador de alguns cálculos, várias foram as representações até que a ideia dos números decimais fosse bem compreendida, por exemplo, para 5,912 escrevia-se $5_0 9_1 1_2 2_3$ ou 5/$\underline{912}$ ou $\frac{0123}{5912}$, e outras mais; sendo a forma atual estabelecida satisfatoriamente apenas no início do século XVIII (DAVIS, 1992).

2.1 Um perfil das primeiras abordagens.

Igualmente, aos poucos, foram surgindo comparações entre sequencias numéricas:

1	2	4	8	16	32	64	128	256	512...	2^n...(P.G.)
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9...	n ...(P.A.)

nas quais o produto de dois termos da 1ª sequência (progressão geométrica) poderia ser localizado através da soma dos correspondentes na 2ª sequência (progressão aritmética). Por exemplo, se quiséssemos saber o valor de 8x32, ao invés de multiplicá-los, bastaria realizar a adição dos correspondentes na 2ª sequência, isto é, 3+5 e após identificar o correspondente da soma 8 na 1ª sequência, ou seja, 256. Portanto, estas tabelas já tinham o embrião das tábuas de logaritmos (IEZZI Et al, 2002).

Assim, foi sendo percebido, gradualmente, que tabelas dessa natureza, com potências de mesma base em correspondência com seus expoentes – já manejadas por Arquimedes de Siracusa na antiguidade (CONTADOR, 2006) –, simplificariam as operações, substituindo multiplicações por adições e divisões por subtrações. Contudo, desta percepção à construção de uma tabela efetivamente abrangente, ainda havia um enorme desafio pela frente, que foi sendo aos poucos subjugado, através de muitos equívocos e êxitos sucessivos: era necessário diminuir as lacunas entre os números da tabela (SOARES,1998).

Observe que esta tabela, apresentada em 1484 pelo matemático francês Nicolas Chuquet (IEZZI Et al, 2002) – como também outras semelhantes e comuns na época (CONTADOR, 2006) – contém grandes intervalos entre os termos, não contemplando sequer a multiplicação de 17 por 119. Todavia, o motivo é bem simples: quem determina a proximidade dos termos é a razão da P.G., que sendo igual a 2 afastará cada vez mais os mesmos.

Então, alguns matemáticos do século seguinte passaram a explorar sequências dessa natureza para números fracionários. É possível, portanto, que muitas das tentativas de construção de tábuas semelhantes à essa, praticadas nesse período, tenham procurado situar a razão da P.G., tanto quanto possível, nas vizinhanças do número 1, elemento neutro da multiplicação, a fim de aproximar termos sucessivos satisfatoriamente; o que se refletiu nos trabalhos daqueles que são considerados “os inventores dos logaritmos” (GAMA, 1985).

Raramente na História da Matemática um resultado é fruto do trabalho de uma única pessoa, embora muitas das fórmulas, teoremas e outros feitos sejam conhecidos por um nome específico. Esse tipo de homenagem nem sempre mantém coerência com quem mais contribuiu com o assunto, isso quando se chega a saber quem mais contribuiu. Entre os candidatos estão aqueles que tornaram os conceitos melhor compreendidos; os que tornaram os resultados mais relevantes por uma aplicação; os que publicaram primeiro, acelerando a divulgação; sendo menos comum referências à precursores (BOYER, 1992).

No caso dos logaritmos, embora haja consenso acerca da prioridade de publicação da tabela em 1614 pelo escocês John Napier (1550-1617) – *Marifice logarithmorum canonis descriptio* (*Uma descrição da maravilhosa regra dos logaritmos*) –, é possível que tanto a persistência exemplar do autor, que investiu vinte anos na realização desta tarefa, quanto o seu esforço em divulgá-la, preparando obra complementar sobre o mecanismo de construção, publicada postumamente, em 1619 – *Marifice logarithmorum canonis constructio* (*A construção dos maravilhosos logaritmos canônicos*) –, tenham sido fatores igualmente relevantes. Isto porque, também há consenso a respeito de um trabalho independente realizado pelo contemporâneo suíço Jobst Bürgi, publicado pouco depois (1620) (BOYER, 1992).

Em que pese a justiça da homenagem, preferimos fomentar, de algum modo, o encontro de certo equilíbrio entre o mérito dos autores destacados e a força da influência cultural daqueles tempos; uma vez que, em decorrência das contribuições Renascentistas às transformações sociais, a Matemática adquiriu papel fundamental para os filósofos da época (GAMA, 1985); o que se procurou caracterizar no texto complementar do Apêndice 1. Além disso, conforme já mencionado, entre os séculos XV e XVII, ocorreu a maior atividade no que se refere a produção de tabelas numéricas até então (DAVIS, 1992); sendo muito comum a construção de tábuas trigonométricas, que eram normalmente direcionadas a astrônomos cujo o excesso de cálculos e obstáculos operacionais acarretavam morosidade no trabalho e erros inevitáveis (CONTADOR, 2006).

2.2 Aspectos mais específicos da invenção.

Uma curiosidade, que ilustra as dificuldades enfrentadas no período das primeiras obras conhecidas, é que em nenhuma delas se utilizou a notação decimal, nem mesmo exponencial, que só seria adotada correntemente algumas décadas após. Bürgi, utilizou-se do número $1+\frac{1}{10000000}$ como razão da sua P.G. (DAVIS, 1992).

Napier, generalizando a ideia de seus predecessores, constrói uma tabela a partir da razão $10000000.\left(1-\frac{1}{10000000}\right)^{n}$, sem posicionar o expoente “n”

apenas registrando-o na tabela e, mais tarde, denominando-o apenas logaritmo. A base 0,9999999, representada no interior do parêntese, era na época um conceito ainda inexistente. Já 10000000 que antecede o parêntese era utilizado para evitar frações ou casas decimais ainda não representadas com segurança (EVES, 2004). Conforme Davis (1992), a razão pela qual as vezes identificam-se logaritmos neperianos como naturais têm origem histórica, o que se abordou sinteticamente no Apêndice 2.

Há certo consenso que Napier, como alguns dos seus contemporâneos, compreendeu quase que imediatamente a importância dos números decimais; pois, em 1615 – com a visita do colega e admirador Henry Briggs (1561-1631), professor universitário em Londres e em Oxford – aceitou a sugestão de aprimoramento da invenção, que tornaria mais prático o emprego dos logaritmos através de duas considerações: que o logaritmo de 1 fosse igual à zero e que o logaritmo de 10 fosse igual à 1; o que equivaleu ao uso inicial do que, mais tarde, seria a base 10, isto é, dos logaritmos decimais. Além disso, na versão inglesa de seu trabalho original, em 1616 ou 1618, Napier adotou e sugeriu a utilização de um ponto como separatriz decimal (DAVIS, 1992).

> Briggs pôs-se a trabalhar com grande zelo, e em 1624 publicou tábuas de logaritmos dos números de 1 a 20000 e de 90000 a 100000 com quatorze casas decimais / DAVIS *et al*.:I, 35-38/. A lacuna entre 20000 e 90000 foi preenchida por Adrien Vlacq, que, no entanto, reduziu o número de casas para dez. Além desses cálculos, Vlacq deu os logaritmos de senos, tangentes e secantes para cada minuto de arco, Seu trabalho foi publicado em 1628 como uma segunda edição das tábuas de Briggs (DAVIS, 1992, p.21).

Em relação à métodos computacionais, sem dúvida, o mais significativo recurso, desde a antiguidade, foram os de extração de raízes quadradas. Tal relevância é evidente na construção engenhosa de tábuas trigonométricas mais antigas. Pode-se dizer que até o século XVII estes dispositivos permaneceram como instrumentos de excelência dos calculadores; estando vinculados, de igual modo, a obtenção dos logaritmos decimais por Briggs e seus contemporâneos, o que procuramos descrever em maiores detalhes no Apêndice 3. Só após a descoberta do Cálculo Diferencial e Integral, no final do século XVII, é que novos recursos foram disponibilizados aos calculadores (DAVIS, 1992).

Entretanto, durante quase quatro séculos os logaritmos exerceram, no mínimo, a função das atuais calculadoras, pois os cálculos ganharam em simplicidade, agilidade e precisão (EVES, 2004).

> A maravilhosa invenção de Napier foi entusiasticamente adotada por toda a Europa. Na astronomia, em particular, já estava passando da hora para essa descoberta; pois, como afirmou Laplace, a invenção dos logarítmos "ao diminuir o trabalho, dobrou a vida dos astrônomos" (EVES, 2004, p. 346).

Há também razoável consenso de que as fórmulas de *Prostaférese*, utilizadas desde o final do século XV, para transformar multiplicações de algumas funções trigonométricas em adições e subtrações, estavam já bem difundidas no século XVII, refletindo-se nas tábuas de Napier, construídas com objetivo de auxílio prático aos cálculos astronômicos, contendo assim logaritmos de senos de ângulos (EVES, 2004).

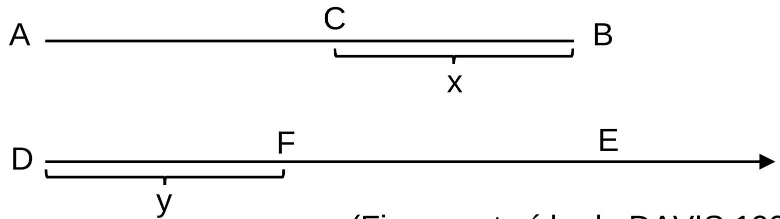
Assim, o primeiro termo de sua P.G., igual a 10000000 cujo logaritmo valia zero, era o seno de 90º, na época com a vírgula decimal suprimida. Os termos restantes de sua P.G., ou seja, o segundo termo 9999999 cujo logaritmo valia 1, o terceiro termo 9999998,0000001 cujo logaritmo valia 2, assim como os demais, eram os senos dos demais ângulos, para minutos sucessivos de arco, com aproximação de sete casas decimais (DAVIS, 1992).

Entretanto, a abordagem de Napier foi inteiramente diferente da *Prostaférese*, pois foi realizada a partir da associação de termos de uma P.G., utilizando-se inclusive, quando necessário, de interpolação (EVES, 2004).

2.3 Uma breve reflexão sobre a definição e a heurística.

Embora estejamos nos detendo no trabalho de Napier, não se deve incorrer no equívoco de deixar transparecer qualquer espécie de "culto aos heróis", o que seria uma forma simplista e reducionista de abordar a História da Matemática, já que o raciocínio dos "inventores dos logaritmos" reflete, em realidade, uma apropriação dos saberes de antecessores e contemporâneos sobre o tema (ALVES; LOPES, 2014). É curioso notar que, por vezes, essa "redução" reflete-se também na interpretação de certas definições históricas, cultuando-as, como se fossem "heurísticas". Nesse caso, há que se ter alguma parcimônia quanto ao exame do significado da definição apresentada na obra de Napier (GAMA, 1985).

Segundo Davis (1992), o autor chegou a seus logaritmos considerando as velocidades de dois pontos movendo-se na mesma direção. Um deles, o ponto C, movendo-se sobre o segmento de reta $\overline{AB}$, com velocidade decrescente e proporcional a sua distância (x) de B, e o outro, o ponto F, movendo-se sobre uma semi-reta $\overrightarrow{DE}$, com velocidade constante e igual a velocidade inicial do ponto C, conforme a figura a seguir.



(Figura extraída de DAVIS 1992, p. 21)

Adotando o comprimento $\overline{AB}$ igual a 10000000 (suprimindo a vírgula) e os pontos C e F como posições observadas num mesmo instante, Napier definiu o comprimento y como o logaritmo neperiano do comprimento x. Isto é, para Davis (1992), esta definição físico-geométrica apresentada na obra, associando duas séries de números, teria sido a "origem das ideias de seu autor".

Presume-se que essa interpretação encontre suas raízes tanto na denominação original que tais números receberam – números artificiais – quanto na influência que as obras gregas clássicas exerceram sobre a cultura matemática daquela região durante o Renascimento. A obra *Os Elementos*, uma sistematização do conhecimento geométrico da antiguidade organizada por Euclides (330 a.C.- 260 a.C.), por exemplo, foi referência de rigor até fins do século XIX, e sabe-se que a noção de rigor está vinculada às definições adotadas em cada época (GAMA, 1985).

Recordemos que Euclides não se utilizou de conceitos primitivos pelo fato de que a geometria para os gregos, embora houvesse avançado em abstração, ainda era uma tentativa de análise lógica do espaço físico idealizado. Daí, ter dito que ponto era aquilo que não tinha partes – uma idealização de partículas muito pequenas – e reta era um comprimento sem largura, uma idealização de linhas retilíneas muito finas (EVES, 2004).

Sob este aspecto, o modo peculiar como a obra apresenta formalmente os logaritmos pode, de fato, ter sido uma idealização original do autor sobre a comparação de duas sequências numéricas.

Entretanto, aquilo que se denomina raciocínio heurístico é algo que não se considera final nem rigoroso, mas apenas provisório e plausível, como andaimes são necessários a construção de um edifício, tendo por objetivo intermediar a elaboração de uma solução, demonstração ou problema em geral, o que não exclui a construção de uma definição (POLYA, 2006).

Além disso, desde o surgimento de *Os Elementos*, definições em teorias axiomáticas enquadram-se não só como esclarecimentos iniciais, mas também na categoria da economia do discurso, como operadoras lógicas de sua síntese (BLANCHÉ, 1978). Isto é, "para evitar, a todo o momento, a descrição de um objeto pela lista das suas propriedades, lança-se mão de uma definição adequada e as propriedades estarão agregadas" (COSTA; TRALES, 2006).

Em que pese Napier ter coroado seu longo trabalho de vinte anos com uma definição que tão somente reflete, a princípio, o rigor cultural característico do seu tempo (GAMA, 1985); não se deve desconsiderar a possibilidade de que o tenha feito senão após completar a tabela, ao menos, durante a fase final de sua construção; tendo em vista que, no período, houve predomínio de atividade matemática na aritmética, na álgebra e na trigonometria (EVES, 2004).

Nesse caso, pode-se ainda acrescer um curioso argumento utilizado na geometria, porém bastante oportuno para a definição em exame

> Alguns matemáticos afirmam que só podemos definir uma certa figura depois de demonstrarmos que essa **figura existe** realmente. Admitamos, que seja formulada a seguinte definição: Chama-se heptaedro regular ao poliedro regular de sete faces. Ora, um poliedro regular de sete faces não existe, e a definição não pode ser admitida (SOUZA, 1942).

Ademais, antes de publicar sua tábua, Napier cunhou o neologismo "logaritmos", forjado a partir de dois radicais gregos: logos (razão) e arithmos (número); possivelmente, uma referência à razão da P.G. (EVES, 2004), ou mesmo, à influência que as sequências numéricas exerceram como fonte do raciocínio heurístico.

3. Atividades para sala de aula.

Propomos, a seguir, quatro atividades que podem auxiliar estudantes que estão tendo o primeiro contato, ou mesmo estudantes que estão revisitando o conceito de logaritmo, a compreender mais seu significado a partir de uma contextualização histórica.

Atividade 1: Sem fazer uso de recursos tecnológicos ou de tabelas, observe o tempo total dispendido para realizar as três operações solicitadas a seguir.

a) 16384 x 4194304 =

b) 134217728 : 512 =

c) $\sqrt{68719476736}$ =

Atividade 2: Observe agora o tempo necessário para nova resolução, realizada em três etapas:

2^{9}	= 512
2^{14}	= 16384
2^{18}	= 262144
2^{22}	= 4194304
2^{27}	= 134217728
2^{36}	= 68719476736

1ª) usando a tabela, substitua cada número envolvido nas operações pela sua potência correspondente;

2ª) aplique uma das seguintes propriedades de potências: $(a^x)^y = a^{x.y}$ ou $a^x : a^y = a^{x-y}$ ou $a^x . a^y = a^{x+y}$ ou $\sqrt[y]{a^x} = a^{x:y}$

3ª) substitua a potência resultante pelo seu valor correspondente na tabela.

Ao final, compare as atividades 1 e 2, quanto ao tempo e a precisão dos resultados encontrados, e resuma suas conclusões.

a) 16384 x 4194304 =

b) 134217728 : 512 =

c) $\sqrt{68719476736}$ =

Noção intuitiva de logaritmo:

Tabelas com potências de mesma base agilizam cálculos e tornam certas operações mais precisas. Entre os séculos XV e XVII, no continente Europeu, intensificaram-se as construções de tabelas contendo aquilo que, no século seguinte, seriam os atuais **expoentes**, em razão de simplificarem operações longas e trabalhosas, inicialmente relativas à Astronomia.

Os números tabelados, foram denominados "logaritmos". Intuitivamente, hoje, podemos dizer que **logaritmos** são **expoentes relativos à uma base previamente determinada**. Portanto, a tabela fornecida na atividade anterior contém **logaritmos de base 2**. Veja outra apresentação da mesma tabela com a atual simbologia adotada para o conceito de logaritmo:

Resultado da potenciação	Logaritmos de base 2
512	9
16384	14
262144	18
4194304	22
134217728	27
68719476736	36

Em símbolos:

x	$\log_2 x$
512	9
16384	14
262144	18
4194304	22
134217728	27
68719476736	36

OBs: Isto é, por logaritmos de base 2 deve-se entender "expoentes da base 2".

Atividade 3: Tente realizar esta tarefa, inicialmente, com auxílio da tecnologia que preferir. Logo após, se achar necessário, utilize a tabela disponibilizada, visualizando-a na forma de potências.

x	$\log_2 x$
32768	15
1048576	20
33554432	25
35104372088832	45

a) 1048576 x 33554432 =

b) $(32768)^3$ =

Noção de logaritmo decimal:

Após o surgimento dos logaritmos percebeu-se que se fossem concebidos relativamente ao que chamamos hoje **base 10**, eles seriam também úteis em outras áreas do conhecimento.

Mas, por que os logaritmos decimais foram tão úteis?

Porque números que diferem pela posição da vírgula tem logaritmos **com mesma parte decimal**, denominada **mantissa**. Portanto, tabelando **apenas as mantissas** é possível **obter logaritmos não tabelados**.

$1 = 10^{0}$
$2 = 10^{0,301}$
$3 = 10^{0,477}$
$4 = 10^{0,602}$
$5 = 10^{0,699}$
$6 = 10^{0,778}$
$7 = 10^{0,845}$
$8 = 10^{0,903}$
...

Ex₁: O logaritmo decimal de 7,78 já tabelado é 0,891. A partir dele, é possível obter-se, facilmente, os logaritmos decimais de números relacionados à 7,78 por potências de 10. Ilustraremos com dois exemplos:

Como 77,8 está entre 10^1 e 10^2 seu logaritmo decimal está entre 1 e 2, observe:

$77,8 = 7,78.10 = 10^{0,891}.\ 10^1 = 10^{1,891}$ então, seu logaritmo é 1,891.

Se 7780 está entre 10^3 e 10^4 então seu logaritmo decimal está entre 3 e 4, veja:

$7780 = 7,78.\ 10^3 = 10^{0,891}.\ 10^3 = 10^{3,891}$ daí, seu logaritmo vale 3,891.

Ex₂: Outra possibilidade é calcular potências de 10 a partir de logaritmos decimais de mesma mantissa. Veja que a partir da tabela abaixo, é possível obter potências como $10^{2,14374}$ e $10^{3,50447}$:

$10^{2,14374} = 10^2.10^{0,14374} = 100.\ 1,3923 = 139,23$

$10^{3,50447} = 10^3.10^{0,50447} = 1000.\ 3,195 = 3195$

x	$\log_{10} x$
1,3923	0,14374
3,195	0,50447

Atividade 4: Observe a tabela de logaritmos decimais, visualize-a sob a forma de potências de 10 e calcule o que se pede:

a) $10^{4,93296} =$

b) $10^{2,43743} =$

c) $10^{3,94190} =$

d) $10^{1,52235} =$

x	$\log_{10} x$
8,5696	0,93296
27,38	1,43743
87,478	1,94190
332,931	2,52235

4. Referências.

ALVES, A. M. M.; LOPES, L. S. A abordagem da História da Matemática em livros didáticos: Análise de um livro texto. In: FONSECA, M. S.; FERREIRA, A. L. A.; ALVES, A. M. M.; SILVEIRA, D. N.; LORETO, A. B. **Matemáticas:** Educação e Pesquisa. Pelotas: Ed. Da Universidade Federal de Pelotas, 2014.

ARANHA, M. L. A.; MARTINS, M. H. P. **Filosofando:** Introdução à Filosofia. São Paulo: Moderna, 2009.

ÁVILA, G. Como se constrói uma tábua de logaritmos. **RPM**, Rio de Janeiro (RJ) – n.26, pp.1 a 3, SBM, 1994.

BLANCHÉ, R. **A axiomática.** São Paulo: Martins Fontes,1978.

BOYER, C. B. **História da Matemática.** São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BOYER, C. B. **Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula; v.6.** São Paulo: Atual, 1992.

CONTADOR, P. R. M. **Matemática**, uma breve história. v.2. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2006.

COSTA, A. B.; OLIVEIRA, R. F. S.; LOPES, T. B. Dos logaritmos de Napier à mais bela de todas as fórmulas. **BOCEHM**, Fortaleza (CE) – v.4, n.12, p. 26 – 40, dez. 2017.

COSTA, C.; TRALES, P. **Argumentação e conceito de prova em matemática.** Rio de Janeiro: UFF/CEP, 2006.

COTRIM, G.; FERNANDES, M. **Fundamentos de Filosofia.** São Paulo: Saraiva, 2013.

DAVIS, H. T. **Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula; v.2.** São Paulo: Atual, 1992.

EVES, H. **Introdução à história da matemática.** Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.

EVES, H. **Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula; v.3.** São Paulo: Atual, 1992.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; PÉRIGO, R.; ALMEIDA, N. **Matemática – Ciências e Aplicações v.1.** São Paulo: Atual, 2004.

OLIVEIRA, A. T. P. **Minimanual compacto de literatura portuguesa:** teoria e prática. São Paulo: Rideel, 2003.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas.** Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

SANTOS, M. D. P. O ideal de ciência na modernidade: Bacon e Descartes. **Investigação Filosófica.** Macapá, v.1, n.10, p.63-73, 2019.

SOARES, L. J. **Sobre o ensino da matemática.** Pelotas: EDUCAT, 1998.

SOUZA, J. C. M. **Dicionário Curioso e Recreativo da Matemática.** Rio de Janeiro: Ed. Getúlio Costa, 1942.

STRUIK, D. J. Por que estudar história da matemática? In: GAMA, R. (Org.) **História da Técnica e da Tecnologia.** São Paulo: EDUSP, 1985.

Apêndice 1: um esboço sociocultural do contexto europeu.

O interesse por estudos relacionados a construção de tábuas numéricas que auxiliassem as necessidades prementes da Astronomia, intensifica-se na Europa num período que a História convencionou chamar Idade Moderna - meados do século XV ao século XVIII -, ao longo da qual outras tantas descobertas matemáticas ocorreram, influenciadas, certamente, não apenas por inspirações matemáticas, mas também por transformações favoráveis nos campos político, econômico, social, religioso e artístico (GAMA, 1985).

Nestes séculos, naquela região, houve a formação dos primeiros Estados nacionais modernos, Absolutistas, com a centralização do poder político pela figura dos reis, atendendo os interesses da burguesia que precisava de um poder centralizador para garantir as condições de mercado. Constituiu-se assim o Mercantilismo, conjunto de práticas econômicas, que significou a transição gradual do Feudalismo para o Capitalismo, uma vez que o florescimento do comércio promovendo as grandes rotas comerciais através da expansão comercial-marítima possibilitou a descoberta do Novo Mundo e sua colonização (COTRIM; FERNANDES, 2013).

No século XIV, os avanços na Matemática foram quase imperceptíveis, no entanto, do século XV em diante a renovação foi intensa (EVES, 1992). As transformações sociais, nesse período, receberam significativas contribuições culturais denominadas, em seu conjunto, Renascimento. Este movimento, que envolveu artistas e intelectuais de diversas áreas, foi inspirado no humanismo, que surge na península itálica em meados do século XIV concebido por defensores do reavivamento da cultura grego-romana, bem como de certos ideais de exaltação do ser humano, tais como a razão e a liberdade. (COTRIM; FERNANDES, 2013).

> O século XV, período inicial do Renascimento, testemunhou o reaparecimento da arte e do saber na Europa. Com o colapso do Império Bizantino, culminando com a queda de Constantinopla perante os turcos em 1453, refugiados afluíram a Itália, trazendo tesouros da civilização grega. Muitos clássicos gregos, conhecidos até então apenas através de traduções árabes que muitas vezes não eram boas,

> podiam agora ser estudados nas fontes originais. Também a invenção da imprensa com tipos móveis, por volta de meados do século, revolucionou o comércio de livros e permitiu que o conhecimento se difundisse numa velocidade sem precedentes (EVES, 1992, p.14).

A Reforma Protestante (1517) fragmentou a unidade religiosa europeia, procurando romper com a mentalidade conservadora do ser humano em relação aos desígnios divinos, ao reconhecer no trabalho uma fonte concreta de prosperidade e felicidade, além de passar a compreender a razão humana como uma extensão do poder divino, que permitia ao indivíduo certa liberdade e autonomia de pensamento. Dessa forma, a visão teocêntrica, predominante até então, gradualmente foi cedendo lugar à tendência antropocêntrica, mas não sem muitos conflitos (COTRIM; FERNANDES, 2013).

A Igreja católica exerceu forte resistência ao Protestantismo, rechaçando-o através da Contra-Reforma, em 1540, monopolizando a educação para difundir a volta da fé irrestrita na autoridade da Igreja e fortalecendo o tribunal da Inquisição, a fim de reprimir manifestações contrárias (OLIVEIRA, 2003).

Acrescente-se que no século XVII, embora economicamente dominante, a burguesia ainda era politicamente subordinada, assim, o homem deste período foi marcado pela tensão destas dualidades, das lutas de classes sociais e de crises religiosas, donde originou-se a arte Barroca, como expressão dessa realidade (OLIVEIRA, 2003).

Portanto, destacam-se como características fundamentais desse período histórico: o surgimento do “racionalismo”, que ao critério exclusivo da fé e da revelação opôs a razão e a capacidade de livre exame do mundo, inclusive de textos bíblicos; o “saber ativo”, em oposição ao saber contemplativo, buscando o conhecimento não apenas com base em princípios, mas na exploração do mundo real por intermédio de experimentações; e a “busca do método” adequado para investigar a realidade, como principal foco dos filósofos, marcando a cisão gradual da ciência com a filosofia aristotélico-escolástica, a fim de desbravar aos poucos seu próprio caminho (ARANHA; MARTINS, 2009).

Santos (2019), esclarece que embora a influência aristotélico-escolástica ainda perdurasse nas artes mecânicas, marítimas e intelectuais no início do século XVII, dois filósofos, entre outros, exerceram papel decisivo em oposição à esta influência, por caminhos distintos, porém, com um ideal de modernidade em comum, perceptível através “do uso da natureza, da técnica, da importância de Deus e das escrituras para enfatizar como a possibilidade do progresso estava em concordância com o que o Criador permitia ao homem" (SANTOS, 2019, p.63).

Ambos buscaram fundamentar a ciência com um método seguro, isento de erros, que eram muito comuns na época. Um deles, Francis Bacon (1561-1626), um empirista inglês, defendeu o clássico método experimental como sendo "o método científico", que consiste em quatro etapas: observação, hipótese, experiência e generalização, isto é, a elaboração de lei ou teoria (ARANHA E MARTINS, 2009, p.374-378). Argumentava sobre a inovação, o rigor e a repetição das experiências em circunstâncias distintas

> Deve-se buscar não apenas uma quantidade muito maior de experimentos, como também de gênero diferente dos que até agora nos têm ocupado. Mas é necessário, ainda, introduzir-se um método completamente novo, uma ordem diferente e um novo processo, para continuar e promover a experiência. (BACON, 1999, p. 79)

O outro, René Descartes (1596-1650), um racionalista francês que tinha por base a dúvida metódica, e, justamente por isso seu método partia de quatro princípios lógicos, que se atendidos com rigor resultariam num conhecimento consistente

> O primeiro era o de jamais acolher alguma coisa como verdadeira que eu não conhecesse evidentemente como tal; isto é, de evitar cuidadosamente a precipitação e a prevenção, e de nada incluir em meus juízos que não se apresentasse tão clara e tão distintamente a meu espírito, que eu não tivesse nenhuma ocasião de pô-lo em dúvida. O segundo, o de dividir cada uma das dificuldades que eu examinasse em tantas parcelas quantas possíveis e quantas necessárias fossem para melhor resolvê-las. O terceiro, o de conduzir por ordem meus pensamentos, começando pelos objetos mais simples e mais fáceis de conhecer, para subir, pouco a pouco, como por degraus, até o conhecimento dos mais compostos, e supondo mesmo uma ordem entre os que não se precedem naturalmente uns aos outros. E o último, o de fazer em toda parte enumerações tão completas e revisões tão gerais, que eu tivesse a certeza de nada omitir" (DESCARTES, 1996, p. 78, 79).

Nesse contexto, a matemática ganha certo status cultural, pois já era uma área desenvolvida na época e que, enquanto instrumento de abordagem da natureza, proporcionou significativos resultados aos filósofos que a adotaram, beneficiando-se do seu método lógico-dedutivo. Um dos precursores da ciência moderna, Galileu Galilei (1564-1642), professor de Matemática da Universidade de Pisa, astrônomo, explicaria o mundo concreto, sensível, através de relações matemáticas, geométricas, procedimento incomum até o momento (COTRIM; FERNANDES, 2013).

> Igualmente decisivo tem sido o papel da matemática no processo de mecanização do quadro do mundo, durante o século XVII. Para Galileu, o livro da natureza foi escrito em caracteres matemáticos – as letras são triângulos, círculos e outras figuras geométricas – e pode ser decifrado somente por aqueles que conhecessem a Matemática. Na filosofia de Descartes, a natureza tem que ser explicada em termos de Mecânica, e a Mecânica em termos de Matemática, de tal maneira que o conhecimento desta ciência seja a chave para a compreensão do universo físico (GAMA, 1985, p.205).

Culturalmente, a Matemática, de ferramenta de professores de escola, de agrimensores, pilotos, cartógrafos e astrônomos, como era a do século XVI, passa a ser a “rainha das ciências”, permeando inclusive as artes. Spinoza escreveu sua *Ética* a maneira axiomática de Euclides (GAMA, 1985).

> Basta voltar o pensamento para pintores como os italianos quatrocentistas e Albert Dürer para compreender que tem havido períodos de conexão intima entre a Matemática e as Artes. Nas escolas desses homens a perspectiva foi desenvolvida e as harmonias sentidas na pintura e na arquitetura foram combinadas na contemplação dos poliedros platônicos ou regulares e suas relações com a chamada secção áurea. Ela preocupou a mente humana desde a antiguidade até o Renascimento, quando Lucca Paccioli escreveu um livro intitulado *Divina Proportione* (1509) com ilustrações muitas vezes atribuídas à Leonardo da Vinci (GAMA, 1985).

Os Elementos era o modelo para pensadores que buscavam um ideal Cartesiano de julgamentos claros e distintos. Entretanto, “essa maneira transcendental de encarar a Matemática, de algum modo perdeu-se na atmosfera mais tranquila do Iluminismo” (GAMA, 1985).

Em síntese, esse ambiente vivenciado na Europa dos séculos XV, XVI e XVII, decorrente de profundas e graduais mudanças no “Zeitgeist” daquele período, constituiu-se no contexto favorável ao surgimento dos logaritmos, pois oportunizou certos aprimoramentos em determinadas áreas dos conhecimentos filosóficos e matemáticos naquela região, correspondentes ao que mais tarde, no século XVIII, seria denominado ciência (COTRIM; FERNANDES, 2013).

Apêndice 2: uma distinção entre logaritmos Neperianos e Naturais.

Inicialmente, caracterizar-se-á o contraste, segundo Contador (2006), entre o número usado por Napier, correspondente ao que atualmente denomina-se base, e o número de Euler (base dos logaritmos naturais). Logo após, será feita uma conjectura sobre a possível razão do polêmico equívoco.

Se Napier não tivesse tido a intenção de evitar frações através do fator 10^7 antecedendo o parêntese na expressão $10000000.\left(1-\frac{1}{10000000}\right)^n$ teríamos, em algum momento:

$$\log_{\left(1-\frac{1}{10^7}\right)} \left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{10^7} = 10^7$$

que é um número muito grande e, no caso, quando "n" tende ao infinito a potência $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ tende ao número $\frac{1}{e}$, que caracteriza o *logaritmo Neperiano*. Já o número "e" por definição corresponde ao limite para o qual tende a expressão $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ quando "n" tende ao infinito. Isto é, na medida em que "n" for crescendo, as frações $\left(1-\frac{1}{n}\right)$ e $\left(1+\frac{1}{n}\right)$ tendem a tornar-se números inversos. Observe que os *logaritmos Neperianos* são decrescentes, ao passo que os *logaritmos Naturais* são crescentes.

É plausível que o equívoco decorra, historicamente, do apêndice de uma tradução do trabalho original de Napier do latim para o inglês, em 1616 ou 1618, contendo uma tábua de logaritmos naturais, sem vírgula decimal, que fornece para o logaritmo de 10 o valor 2,302584. Ocorre, porém, que a tábua citada não era de Napier, mas provavelmente de William Oughtred, mais tarde ampliada por John Speidell, em 1662, com logaritmos do tipo $10^6.(\ln x)$, com aproximação de seis casas decimais, já os *Neperianos* para sete casas decimais (DAVIS, 1992).

Apêndice 3: um método antigo para o cálculo de logaritmos decimais.

Inicialmente, apresentaremos uma visão mais panorâmica do cálculo de logaritmos decimais realizado por Briggs, segundo Ávila (1994).

Sabendo que qualquer número pode ser escrito como o produto de um número, entre 1 e 10, por uma potência de 10, bastaria conhecer os logaritmos de número entre 1 e 10 para determinar o logaritmo de qualquer número. Esses foram denominados *mantissas*.

Briggs começou extraindo a raiz quadrada de 10, e também do resultado, bem como dos resultados sucessivos de cada extração seguinte. Realizou esse processo por 54 vezes. Desse modo, obteve os logaritmos de vários números.

Então, foi aumentando a tabela utilizando os resultados já obtidos e a propriedade fundamental: log (a.b) = log a + log b, veja

$$\log(10^{1:2} \times 10^{1:4}) = \log(10^{1:2}) + \log(10^{1:4})$$
$$\log(3{,}16228 \times 1{,}77828) = 0{,}5 + 0{,}25 = 0{,}75$$

Observe que o conhecimento dos logaritmos de “a” e “b” permite calcular, facilmente, o logaritmo de $\sqrt{a.b}$ pela propriedade correspondente (ÁVILA, 1994).

A seguir, examinaremos em pormenores o antigo método utilizado por Briggs, comum aos calculistas até então, através de uma pequena tábua, tanto com poucos valores quanto com uma quantidade reduzida de casas decimais.

O Método da raiz: (Adaptado de EVES, 2004)

Extraindo-se a raiz quadrada de 10, depois a raiz quadrada desse primeiro resultado, depois a raiz desse segundo resultado e assim por diante, pode-se construir a seguinte tábua, que contém apenas 18 das 54 extrações realizadas por Briggs.

$10^{1/2} = 3{,}16228$	$10^{1/128} = 1{,}01815$	$10^{1/8192} = 1{,}00028$
$10^{1/4} = 1{,}77828$	$10^{1/256} = 1{,}00904$	$10^{1/16384} = 1{,}00014$
$10^{1/8} = 1{,}33352$	$10^{1/512} = 1{,}00451$	$10^{1/32768} = 1{,}00007$
$10^{1/16} = 1{,}15478$	$10^{1/1024} = 1{,}00225$	$10^{1/65536} = 1{,}00004$
$10^{1/32} = 1{,}07461$	$10^{1/2048} = 1{,}00112$	$10^{1/131072} = 1{,}00002$
$10^{1/64} = 1{,}03663$	$10^{1/4096} = 1{,}00056$	$10^{1/262144} = 1{,}00001$

(Tabela extraída de EVES 2004, p. 367)

1º) Seja N um número entre 1 e 10.

Suponha que queiramos calcular log N com 3 casas decimais.

Ex: N= 4,6 portanto, queremos descobrir $\log_{10}(4{,}6)$ com 3 casas decimais.

2º) Divide-se N pelo maior resultado da tabela, que não exceda N, para obter como quociente um número N_1.

Da divisão (4,6):(3,16228) = 1,45464... ≅ 1,4546 resultará nosso N_1.

OBs: Pede-se resultado com 3 casas decimais. Então, trabalharemos com 4 casas decimais para termos 3 algarismos certos e um duvidoso, o arredondado.

3º) Suponha que o divisor seja o número correspondente a $10^{1/P_1}$. Então $\frac{1}{P_1}$ será a primeira parcela do logaritmo a ser calculado.

Como o divisor foi 3,16228 então a primeira parcela do logaritmo será $\frac{1}{2}$

4º) Repetindo-se o mesmo raciocínio para N_1 e sucessivamente para N_2 , N_3 ,..., N_n até que N_n difira da unidade na quarta casa decimal, ou seja, quando obtivermos N_n=1,000y... onde y≠0, então, poderemos interromper o processo.

$N_1 = 1{,}4546$ → o divisor será 1,33352 e a segunda parcela do logaritmo $\frac{1}{8}$

Da divisão (1,4546):(1,33352) = 1,09079... ≅ 1,0908 resultará nosso N_2.

$N_2 = 1{,}0908$ → o divisor será 1,07461 e a terceira parcela do logaritmo $\frac{1}{32}$

Da divisão (1,0908):(1,07461) = 1,01506... ≅ 1,0151 resultará nosso N_3.

$N_3 = 1{,}0151$ → o divisor será 1,00904 e a quarta parcela do logaritmo $\frac{1}{256}$

Da divisão (1,0151):(1,00904) = 1,00600... ≅ 1,006 resultará nosso N_4.

$N_4 = 1{,}006$ → o divisor será 1,00451 e a quinta parcela do logaritmo $\frac{1}{512}$

Da divisão (1,006):(1,00451) = 1,00148... ≅ 1,0015 resultará nosso N_5.

$N_5 = 1{,}0015$ → o divisor será 1,00112 e a sexta parcela do logaritmo $\frac{1}{2048}$

Da divisão (1,0015):(1,00112) = 1,00037... ≅ 1,0004 resultará nosso N_6.

5º) Como N_6 difere da unidade na 4ª casa decimal, interrompemos o processo e o valor do logaritmo já pode ser obtido satisfatoriamente, basta fazer:

$$\log_{10}(N) = \frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2} + \frac{1}{P_3} + \cdots + \frac{1}{P_n}$$

ou

$$\log_{10}(4{,}6) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{256} + \frac{1}{512} + \frac{1}{2048} = 0{,}6625\ldots \cong 0{,}663$$

Note o(a) colega que esta fórmula final nada mais é do que a aplicação da propriedade do logaritmo do produto sendo transformado em adição, aplicado a fatoração do número N inicial, veja:

$$N = 10^{1/P_1}.\ 10^{1/P_2}.\ 10^{1/P_3} \ldots\ 10^{1/P_n}$$

OBs: O resultado corresponderá ao valor obtido diretamente na calculadora, porém, já arredondado para o número de casas solicitado.

Apêndice 4 - Versão final do produto

Texto de Apoio a Docentes: introdução aos logaritmos através de uma abordagem histórica

Almiro Rodolfo Kmentt Viana

Vinicius Carvalho Beck

PPGCITED
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS NA EDUCAÇÃO

INSTITUTO FEDERAL
Sul-rio-grandense
Câmpus
Pelotas - Visconde da Graça

Ficha Técnica

Autores

Almiro Rodolfo Kmentt Viana
Vinicius Carvalho Beck

Design

Equipe Proedu

Ficha Catalográfica

V614t Viana, Almiro Rodolfo Kmentt

Texto de Apoio a Docentes: Introdução aos logaritmos através de uma abordagem histórica/ Almiro Rodolfo Kmentt Viana, Vinicius Carvalho Beck. – 2024.
45 f. : il.

Produto educacional (Mestrado) – Instituto Federal Sul-Rio-Grandense, Câmpus Pelotas Visconde da Graça, Programa de Pós - graduação em Ciências e Tecnologias da Educação, 2024.

1. Tecnologias na educação. 2. Matemática. 3. História da matemática. 4. Ensino de logaritmos. I. Beck, Vinicius Carvalho (aut.). II. Título.

CDU: 378.046-021.68:51

Catalogação na fonte elaborada pelo Bibliotecário
Vitor Gonçalves Dias CRB 10/1938
Câmpus Pelotas Visconde da Graça

Este template é uma cooperação entre Proedu (proedu.rnp.br) e PPGCITED

Sumário

1. Apresentação

Este Texto de Apoio tem por objetivo contribuir com colegas docentes para o aprimoramento de atividades pedagógicas relacionadas a introdução do conceito de logaritmos através de um enfoque histórico; muito embora pretenda disponibilizar reflexões que assegurem a possibilidade de abordagem da História da Matemática no ensino de quaisquer outros conteúdos.

Mas, por que a escolha dos logaritmos e da etapa de introdução?

A simbologia, que tem por fim comunicar conceitos com clareza, elegância e precisão, eventualmente pode revelar-se uma sobrecarga, comprometendo a boa compreensão do conteúdo, podendo ocasionar certa aversão do aluno pela Álgebra, especialmente se a fase introdutória, de conceituação, não for bem encaminhada. É necessário que o estudante perceba, pela própria experiência, que a notação favorece o raciocínio (Polya, 2006). Em especial, no caso da função logarítmica temos um adicional de vulnerabilidade à simbologia, pois, é bem plausível que uma potência varie segundo a variação do expoente, porém, nem um pouco intuitivo que o expoente dependa da potência!

Daí decorre a necessidade de uma introdução bem mais intuitiva do conceito, investindo um tempo maior do que o habitual, o que nos parece uma boa oportunidade para que o aluno vivencie a demanda histórica do conceito, ampliando sua compreensão sobre a evolução da Matemática e sua habilidade interpretativa, familiarizando-se assim de modo mais gradual com a simbologia e aproximando-se intuitivamente do significado das propriedades operatórias, antes mesmo de chegar à formalização da definição. Isso, possivelmente, lhe permitirá maior segurança nas etapas mais abstratas do estudo do tema.

Ao elaborar este texto de apoio nos colocamos na posição de meros colaboradores que compõem uma equipe de trabalho. Se conseguirmos, em conjunto, inspirarmo-nos, bem como inspirar minimamente alguns de nossos estudantes, já nos sentiremos regiamente recompensados. Com votos de boa leitura,

os autores.

2. A invenção dos logaritmos

O desenvolvimento da computação (ato de calcular) está vinculado ao convívio humano desde os tempos mais longínquos, relacionado diretamente as suas necessidades de sobrevivência.

> Entre povos primitivos a computação atendia a duas necessidades primárias. A primeira era a necessidade de enumerações básicas em transações comerciais, tais como a contagem de rebanhos, troca de moedas e partilha de terras. A outra era a necessidade de um calendário pelo qual o homem pudesse manter um registro das estações. “Na ocasião em que as Plêiades começarem a se elevar, comece sua colheita”, diz Hesíodo (século VIII a.C.), “e volte a arar quando elas começarem a se pôr. As Plêiades permanecem ocultas por quarenta noites e quarenta dias”. O homem, então, voltava os olhos para o céu. O movimento da lua era cuidadosamente medido (Davis, 1992, p.1).

Os primeiros habitantes das margens do Rio Nilo, também necessitavam observar a época das cheias cujo início ocorria, aproximadamente, na ocasião em que Sírio surgia junto com o Sol. Nessas primeiras demandas estão situadas as origens mais remotas da construção de tábuas numéricas (Davis, 1992).

No entanto, o interesse por tais estudos intensificou-se na Europa, entre os séculos XV e XVII, em razão da influência prática dos muitos campos nos quais os cálculos numéricos eram imprescindíveis, tais como o comércio, a navegação, a Astronomia e a Agrimensura, havendo uma surpreendente demanda para que eles se tornassem mais rápidos e precisos (Eves, 1992).

> O século XVI, precedente ao da descoberta dos logaritmos, foi um período de intensa revolução em diferentes campos científicos. Dentre eles, se destacavam a astronomia e a ciência geodésica. Observamos que geodésica é a ciência que estuda as dimensões e a forma terrestres e seu campo gravitacional. Um de seus objetivos é fazer um mapeamento da Terra e calcular a distância entre pontos distintos sobre o globo terrestre (Monico, 2018). Esses dois campos foram muito importantes, por exemplo, para as Grandes Navegações que ocorreram nos séculos XV e XVI, pois exigiam dos exploradores que se aventurassem por um mar inexplorado: o Oceano Atlântico. Para tal feito, eles precisavam, de alguma forma, se localizar neste mar, e observar a posição dos astros no céu era a única maneira para isso. Desta forma, era necessário conhecer, com a maior precisão possível, as medidas da Terra e a distância entre pontos situados em posições diferentes do globo terrestre (Oliveira Junior, 2020, p. 4).

Com o acúmulo do capital comercial e emergência da burguesia, no plano socioeconômico, houve a necessidade de ampliação das rotas comerciais, o que se tornou possível, entre outros fatores, pelo impulso de investimentos desta burguesia nos estudos de Astronomia; esta, por sua vez, auxiliava a navegação na busca de novos mercados econômicos, gerando lucros que retornavam e enriqueciam cada vez mais os burgueses (Costa; Oliveira; Lopes, 2017).

O desenvolvimento econômico do período e as transformações sociais consequentes receberam contribuições culturais denominadas, em conjunto, Renascimento. Este, foi favorecido por uma invenção técnica já conhecida no Oriente: a imprensa; que se expandiu rapidamente, sendo essencial para difundir as obras clássicas e as modernas a um público mais amplo, conhecimento há muito apenas nas mãos do clero (Aranha; Martins, 2009).

No cálculo com frações, por exemplo, que era um problema da maior importância desde a antiguidade, nossos atuais métodos não foram alcançados tão rapidamente. As primeiras obras impressas mostram que apenas no século XVI é que o traço de fração passou a ser adotado e que não era incomum encontrar frações tais como $\frac{3345312}{4320864}$, o que dificultava as operações. O mesmo ocorria na Astronomia onde, até então, as tabelas continham frações sexagesimais, ou seja, o denominador era uma potência de 60 (Davis, 1992).

Aos poucos, alguns matemáticos foram constatando que operações com frações tipo $\frac{100012}{100000}$, com potência de 10 no denominador, eram mais simples. No final deste período, em 1585, foi publicado na Holanda um livreto de sete páginas, intitulado "*O décimo*", que explicava as frações decimais, amenizando um pouco as dificuldades computacionais dos cientistas. Outro livro sobre o tema apareceu em 1592 na Suíça; e um terceiro em 1603 na Alemanha (Davis, 1992).

Um sistema numérico e uma notação adequados são considerados pré-requisitos para a computação; porém, embora o sistema indo-arábico já tivesse sido introduzido na Europa e fosse um elemento facilitador de alguns cálculos, várias foram as representações até que a ideia dos números decimais fosse bem compreendida. Por exemplo, para 5,912 escrevia-se $5_0 9_1 1_2 2_3$ ou $5/\underline{912}$ ou $\substack{0123 \\ 5912}$, e outras mais; sendo a forma atual estabelecida satisfatoriamente apenas no início do século XVIII (Davis, 1992).

2.1 Um perfil das primeiras abordagens

Igualmente, aos poucos, foram surgindo comparações entre sequencias numéricas: 1 2 4 8 16 32 64 128 256 512... 2^n...(P.G.)

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9... n ...(P.A.)

nas quais o produto de dois termos da 1ª sequência (progressão geométrica) poderia ser localizado através da soma dos correspondentes na 2ª sequência (progressão aritmética). Por exemplo, se quiséssemos saber o valor de 8x32, ao invés de multiplicá-los, bastaria realizar a adição dos correspondentes na 2ª sequência, isto é, 3+5 e após identificar o correspondente da soma 8 na 1ª sequência, ou seja, 256. Portanto, essas tabelas já tinham o embrião das tábuas de logaritmos (Iezzi et al, 2002).

Assim, foi sendo percebido, gradualmente, que tabelas dessa natureza, com potências de mesma base em correspondência com seus expoentes – já manejadas por Arquimedes de Siracusa na antiguidade (Contador, 2006) –, simplificariam as operações, substituindo multiplicações por adições e divisões por subtrações. Contudo, desta percepção à construção de uma tabela efetivamente abrangente, ainda havia um enorme desafio pela frente, que foi sendo aos poucos subjugado, através de muitos equívocos e êxitos sucessivos: era necessário diminuir as lacunas entre os números da tabela (Soares,1998).

É importante destacar que a tabela apresentada em 1484 pelo matemático francês Nicolas Chuquet (Iezzi Et al, 2002) – como também outras semelhantes e comuns na época (Contador, 2006) – contém grandes intervalos entre os termos, não contemplando sequer a multiplicação de 17 por 119. Todavia, o motivo é bem simples: quem determina a proximidade dos termos é a razão da P.G., que sendo igual a 2 afasta cada vez mais os mesmos.

Então, alguns matemáticos do século seguinte passaram a explorar sequências dessa natureza para números fracionários. É possível, portanto, que muitas das tentativas de construção de tábuas semelhantes à essa, praticadas nesse período, tenham procurado situar a razão da P.G., tanto quanto possível, nas vizinhanças do número 1, elemento neutro da multiplicação, a fim de aproximar termos sucessivos satisfatoriamente; o que refletiu nos trabalhos daqueles que são considerados “os inventores dos logaritmos” (Struik, 1985).

Raramente na História da Matemática um resultado é fruto do trabalho de uma única pessoa, embora muitas das fórmulas, teoremas e outros feitos sejam conhecidos por um nome específico. Esse tipo de homenagem nem sempre mantém coerência com quem mais contribuiu com o assunto, isso quando se chega a saber quem mais contribuiu. Entre os candidatos estão aqueles que tornaram os conceitos melhor compreendidos; os que tornaram os resultados mais relevantes por uma aplicação; os que publicaram primeiro, acelerando a divulgação; sendo menos comum referências à precursores (Boyer, 1992).

No caso dos logaritmos, embora haja consenso acerca da prioridade de publicação da tabela em 1614 pelo escocês John Napier (1550-1617) – *Marifice logarithmorum canonis descriptio* (*Uma descrição da maravilhosa regra dos logaritmos*) –, é possível que tanto a persistência do autor, que investiu vinte anos na realização desta tarefa, quanto o seu esforço em divulgá-la, preparando uma obra complementar sobre o mecanismo de construção, publicada postumamente, em 1619 – *Marifice logarithmorum canonis constructio* (*A construção dos maravilhosos logaritmos canônicos*) –, tenham sido fatores igualmente relevantes. Isto porque, também há consenso a respeito de um trabalho independente realizado pelo contemporâneo suíço Jobst Bürgi, publicado pouco depois, em1620 (Boyer, 1992).

Em que pese a justiça da homenagem, preferimos fomentar, de algum modo, o encontro de certo equilíbrio entre o mérito dos autores destacados e a força da influência cultural daqueles tempos; uma vez que, em decorrência das contribuições renascentistas às transformações sociais, a Matemática adquiriu papel fundamental para os filósofos da época (Struik, 1985); o que se procurou caracterizar no texto complementar do Apêndice 1 de texto. Além disso, conforme já mencionado, entre os séculos XV e XVII, ocorreu a maior atividade no que se refere a produção de tabelas numéricas até então (Davis, 1992); sendo muito comum a construção de tábuas trigonométricas, que eram normalmente direcionadas a astrônomos cujo excesso de cálculos e obstáculos operacionais acarretavam morosidade no trabalho e erros inevitáveis (Contador, 2006).

2.2 Aspectos mais específicos da invenção

Uma curiosidade, que ilustra as dificuldades enfrentadas no período das primeiras obras conhecidas, é que em nenhuma delas se utilizou a notação decimal, nem mesmo exponencial, que só seria adotada correntemente algumas décadas após. Bürgi, por exemplo, utilizou-se da representação $1 + \frac{1}{10000000}$ como razão de uma Progressão Geométrica (P. G.) em um livro (Davis, 1992).

Napier, generalizando a ideia de seus predecessores, constrói uma tabela a partir da razão $10000000.\left(1 - \frac{1}{10000000}\right)^n$, sem posicionar o expoente n, apenas registrando-o na tabela e, mais tarde, denominando-o logaritmo. A base 0,9999999 representada no interior do parêntese, era na época um conceito ainda inexistente. Já 10000000 que antecede o parêntese era utilizado para evitar frações ou casas decimais ainda não representadas com segurança (Eves, 2004). Conforme Davis (1992), a razão pela qual às vezes identificam-se logaritmos neperianos como naturais têm origem histórica (no Apêndice 2 deste texto de apoio aprofundamos mais essa discussão).

Há certo consenso que Napier, assim como alguns dos seus contemporâneos, compreendeu quase que imediatamente a importância dos números decimais; pois, em 1615 – com a visita do colega e admirador Henry Briggs (1561-1631), professor universitário em Londres e em Oxford – aceitou a sugestão de aprimoramento da invenção dos números decimais, que tornaria mais prático o emprego dos logaritmos, necessitando porém de duas convenções teóricas: a de que o logaritmo de 1 fosse igual à zero; e a de que o logaritmo de 10 fosse igual à 1. Isto equivaleu ao uso inicial do que, mais tarde, seria a base 10, isto é, dos logaritmos decimais. Além disso, na versão inglesa de seu trabalho original, em 1616 ou 1618, Napier adotou e sugeriu a utilização de um ponto como separatriz decimal (Davis, 1992).

Briggs publicou, logo em seguida, em 1617, sua primeira tábua contendo os logaritmos decimais dos números de 1 a 1000, com quatorze casas decimais de precisão; porém, seguiu adiante, ampliando essa tabela até o ano de 1624, quando apresentou sua obra mais abrangente: *Arithmetica Logarithmica* (Contador, 2006).

> Briggs pôs-se a trabalhar com grande zelo, e em 1624 publicou tábuas de logaritmos dos números de 1 a 20000 e de 90000 a 100000 com quatorze casas decimais / Davis *et al*.:I, 35-38/. A lacuna entre 20000 e 90000 foi preenchida por Adrien Vlacq, que, no entanto, reduziu o número de casas para dez. Além desses cálculos, Vlacq deu os logaritmos de senos, tangentes e secantes para cada minuto de arco, Seu trabalho foi publicado em 1628 como uma segunda edição das tábuas de Briggs (Davis, 1992, p.21).

Em relação aos métodos computacionais, sem dúvida, os mais significativos recursos, desde a antiguidade, foram os de extração de raízes quadradas. Tal relevância é evidente na engenhosa construção de tábuas trigonométricas mais antigas. Pode-se dizer que até o século XVII estes dispositivos permaneceram como instrumentos de excelência dos calculadores; estando vinculados, de igual modo, a obtenção dos logaritmos decimais por Briggs e seus contemporâneos, o que se procurou descrever em maiores detalhes no Apêndice 3 deste texto. Só após a descoberta do Cálculo Diferencial e Integral, no final do século XVII, é que novos recursos foram disponibilizados aos calculadores (Davis, 1992).

Entretanto, durante quase quatro séculos, os logaritmos exerceram, no mínimo, a função das atuais calculadoras, pois os cálculos ganharam em simplicidade, agilidade e precisão (Eves, 2004).

> A maravilhosa invenção de Napier foi entusiasticamente adotada por toda a Europa. Na astronomia, em particular, já estava passando da hora para essa descoberta; pois, como afirmou Laplace, a invenção dos logaritmos ”ao diminuir o trabalho, dobrou a vida dos astrônomos” (Eves, 2004, p. 346).

Há também razoável consenso de que as fórmulas de *Prostaférese* utilizadas desde o final do século XV, para transformar multiplicações de algumas funções trigonométricas em adições e subtrações, estavam já bem difundidas no século XVII, refletindo-se nas tábuas de Napier, construídas com objetivo de auxílio prático aos cálculos astronômicos, contendo assim logaritmos de senos de ângulos (Eves, 2004).

2.sen(a).cos(b) = sen (a + b) + sen (a – b)	2.sen(a).sen(b) = cos (a – b) – cos (a + b)
2.cos(a).sen(b) = sen (a + b) – sen (a – b)	2.cos(a).cos(b) = cos (a + b) + cos (a – b)

Assim, o primeiro termo da P.G. de Napier, igual a 10000000, cujo logaritmo valia zero, era o seno de 90º (lembrando que nessa época ainda não era consenso adotar 1 para o seno máximo, e Napier, por exemplo, adotou 10000000 como raio de sua circunferência tomada como referência trigonométrica**)**, na época com a vírgula decimal suprimida. Os termos restantes de sua P.G., ou seja, o segundo termo 9999999 cujo logaritmo valia 1, o terceiro termo 9999998,0000001 cujo logaritmo valia 2, assim como os demais, eram os senos dos demais ângulos, para minutos sucessivos de arco, com aproximação de sete casas decimais (Davis, 1992).

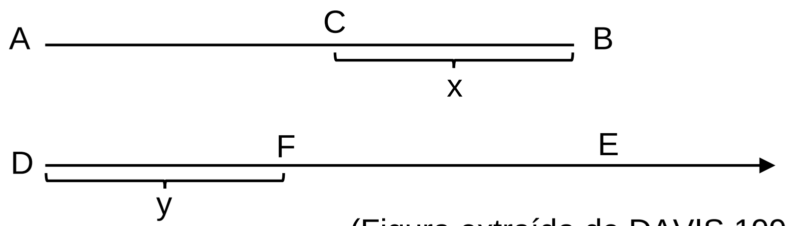
Entretanto, a abordagem de Napier foi inteiramente diferente da *Prostaférese*, pois foi realizada a partir da associação de termos de uma P.G., utilizando-se inclusive, quando necessário, de interpolação (Eves, 2004).

2.3 Uma breve reflexão sobre a definição e a heurística

Embora estejamos nos detendo no trabalho de Napier, não se deve incorrer no equívoco de deixar transparecer qualquer espécie de culto aos heróis, o que seria uma forma simplista e reducionista de abordar a Historiografia da Matemática, tendo em vista que o raciocínio dos inventores dos logaritmos, na realidade, possivelmente foi uma apropriação dos saberes de antecessores e contemporâneos sobre o tema (Alves; Lopes, 2014).

É curioso notar que, por vezes, essa simplificação e redução reflete-se também na interpretação de certas *definições* históricas, que são cultuadas como se fossem *heurísticas* (modos de pensar e deduzir proposições). Nesse caso, há que se ter alguma parcimônia quanto ao exame do significado da definição apresentada na obra de Napier; o que se pretende ilustrar através de uma breve análise, em auxílio da qual disponibilizou-se o Apêndice 4 deste texto, contendo esclarecimentos complementares.

Segundo Davis (1992), o autor chegou a seus logaritmos considerando as velocidades de dois pontos movendo-se na mesma direção. Um deles, o ponto C, movendo-se sobre o segmento de reta $\overline{AB}$, com velocidade decrescente e proporcional a sua distância x de B, e o outro, o ponto F, movendo-se sobre uma semi-reta $\overrightarrow{DE}$, com velocidade constante e igual a velocidade inicial do ponto C, conforme a figura a seguir.



(Figura extraída de DAVIS 1992, p. 21)

Adotando o comprimento $\overline{AB}$ igual a 10000000 (suprimindo a vírgula) e os pontos C e F como posições observadas num mesmo instante, Napier definiu o comprimento y como o logaritmo neperiano do comprimento x. Isto é, para Davis (1992), esta definição físico-geométrica apresentada na obra, associando duas séries de números, teria sido a “origem das ideias de seu autor”.

Presume-se que essa interpretação encontre suas raízes tanto na denominação original que tais números receberam – números artificiais – quanto na influência que as obras gregas clássicas exerceram sobre a cultura matemática daquela região durante o Renascimento. A obra *Os Elementos*, uma sistematização do conhecimento geométrico da antiguidade organizada por Euclides (330 a.C.- 260 a.C.), por exemplo, foi referência de *rigor lógico* até fins do século XIX, e sabe-se que a noção de *rigor lógico* está vinculada às *definições* adotadas em cada época (Struik, 1985).

> [...] da definição de logaritmo acima, Napier expressou a relação fundamental de seus logaritmos: se $a : b = c : d$, então: $\log(a)-\log(b)=\log(c)-\log(d)$. A partir dela, ele demostra outras propriedades como, se $b = c$, então $2.\log(b) = \log(a) + \log(d)$. Nota-se, portanto, que as fórmulas obtidas por Napier são bem diferentes das que são vistas no Ensino Médio. Isto se deve ao fato de Napier tentar obter fórmulas que se adaptassem à estrutura das regras dadas às proposições de Trigonometria, que eram expressas em proporções do V livro de Euclides (Naux, 1966, p. 47).

Recordemos que Euclides não se utilizou de conceitos primitivos pelo fato de que a Geometria para os gregos, embora houvesse avançado em abstração, ainda era uma tentativa de análise lógica do espaço físico idealizado. Daí, ter dito que ponto era aquilo que não tinha partes – *uma idealização de partículas muito pequenas* – e reta era um comprimento sem largura, uma *idealização de linhas retilíneas muito finas* (Eves, 2004).

Sob este aspecto, o modo peculiar como a obra apresenta formalmente os logaritmos pode, de fato, ter sido uma idealização original do autor sobre a comparação de duas sequências numéricas.

Entretanto, aquilo que se denomina *raciocínio heurístico* é algo que não se considera final nem rigoroso, mas apenas provisório e plausível, “assim como andaimes são necessários a construção de um edifício” (Polya, 2006, p.152), tendo por objetivo intermediar a elaboração de uma solução, demonstração ou problema em geral, o que não exclui a construção de uma definição.

Além disso, desde o surgimento de *Os Elementos*, definições ocupavam o topo das teorias dedutivas e possuíam um papel muito significativo quanto ao *rigor lógico*. Isto é, “para evitar, a todo o momento, a descrição de um objeto pela lista das suas propriedades, lança-se mão de uma definição adequada e as propriedades estarão agregadas” (Costa; Trales, 2006).

Em que pese Napier ter coroado seu longo trabalho de vinte anos com uma definição que tão somente reflete, a princípio, o *rigor lógico* característico da cultura matemática de seu tempo (Struik, 1985); não se deve desconsiderar a possibilidade de que o tenha feito senão após completar a tabela, ao menos, durante a fase final de sua construção; tendo em vista que, naquele período, houve predomínio de atividade matemática na Aritmética, na Álgebra e na Trigonometria, podendo daí terem surgido as primeiras ideias (Eves, 2004). Nesse caso, pode-se ainda acrescentar um curioso argumento utilizado na Geometria, porém, bastante oportuno para a definição em exame:

> Alguns matemáticos afirmam que só podemos definir uma certa figura depois de demonstrarmos que essa **figura existe** realmente. Admitamos, que seja formulada a seguinte definição: Chama-se heptaedro regular ao poliedro regular de sete faces. Ora, um poliedro regular de sete faces não existe, e a definição não pode ser admitida (Souza, 1942).

O que significa ser perfeitamente plausível que tal definição tenha sido elaborada após obter, ao menos, as primeiras aproximações satisfatórias entre os valores de sua extensa tabela numérica. Ademais, antes de publicar sua tábua, Napier cunhou o neologismo “logaritmos”, forjado a partir de dois radicais gregos: logos (razão) e arithmos (número); possivelmente, uma referência à razão da progressão (Eves, 2004), ou mesmo, à influência que as sequências numéricas exerceram como fonte do raciocínio heurístico.

Em síntese, pode-se afirmar, certamente, apenas que sua definição foi o ponto de partida para a apresentação de sua teoria, mas nada além disso! Pois existem bons motivos para compreender qualquer que tenha sido sua heurística.

3. Atividades para sala de aula

Propomos, a seguir, sete atividades que podem auxiliar estudantes que estão tendo o primeiro contato com o conceito de logaritmo, ou revisitando-o, com o intuito de compreender mais seu significado a partir de uma contextualização histórica.

Noção intuitiva de seu propósito original:

Atividade 1: Sem fazer uso de recursos tecnológicos digitais ou de tabelas, anote o tempo total dispendido para realizar as duas operações solicitadas a seguir.

a) 8192 x 1048576 =   b) 8589934592 **:** 64 =

Comentário: Viana (2024), testando esta atividade em turmas de ensino médio e discutindo-a com professoras (uma das professoras aplicou a atividade em suas turmas) em roda de conversa, mostra que para sua aplicação pode ser necessário o acompanhamento do docente como facilitador.

Atividade 2: Anote o tempo que levará nesta nova atividade, para compará-lo tanto com o da atividade anterior, quanto com o da atividade 5, mais tarde.

$64 = 2^6$
$8192 = 2^{13}$
$1048576 = 2^{20}$
$134217728 = 2^{27}$
$8589934592 = 2^{33}$
$549755813888 = 2^{39}$

Agora você resolverá os itens anteriores por um outro método, que consiste em três etapas:

1ª) Usando a tabela acima, substitua cada número envolvido nas operações pela sua potência correspondente;

2ª) Logo após, no item "a" aplique a propriedade $a^x . a^y = a^{x+y}$;

no item "b" utilize a seguinte propriedade $a^x : a^y = a^{x-y}$;

3ª) Por fim, substitua a potência resultante pelo correspondente valor da tabela.

Em relação ao tempo e a precisão dos resultados, qual foi o método mais eficaz?

a) 8192 x 1048576 = b) 8589934592 **:** 64 =

Comentário: Viana (2024), testando a atividade em turmas de ensino médio e discutindo-a com professoras (uma das professoras aplicou a atividade em suas turmas) em roda de conversa, atesta que antes da sua aplicação pode ser necessário relembrar a representação genérica dos elementos da potenciação.

Noção intuitiva de sua definição:

Entre os séculos XV e XVII, no continente Europeu, intensificaram-se as construções de tabelas contendo números denominados *logaritmos*, que ocupariam no século seguinte a posição dos atuais expoentes.

Hoje, intuitivamente, podemos dizer que **logaritmos** são **expoentes** relativos à uma **base previamente determinada**. Portanto, a tabela fornecida na atividade anterior contém **logaritmos de base 2**. Veja, ao lado, como representá-la a partir do conceito intuitivo de **logaritmo.**

Resultados das potenciações	Logaritmos de base 2
32	6
8192	13
1048576	20
134217728	27
8589934592	33
54975581388	39

Atividade 3: Complete o quadro abaixo com as potências correspondentes a tabela de logaritmos de base 2, conforme a primeira conversão exemplificada:

x	$\log_2 x$
16384	14
524288	19
16777216	24
536870912	29
17179869184	34
274877906944	38

$16384 = 2^{14}$
524288 =
16777216 =
536870912 =
17179869184 =
274877906944 =

Comentário: Estudos realizados (Galupo, 2021; Pereira; Resende, 2021) com turmas que já haviam estudado logaritmos indicam que a percepção do conceito de logaritmo como expoente não costuma acontecer.

Atividade 4: Observe, inicialmente, o mecanismo de construção da tabela que está na próxima página e, só após, conclua a atividade calculando o que se pede:

1º) Para obter a coluna da esquerda fomos duplicando os valores anteriores, a partir do primeiro.

2º) Para obter os valores da coluna da direita fomos simplesmente adicionando uma unidade aos seus anteriores, a partir do inicial.

x	$\log_2 x$
1	0
2	1
4	2
8	3
16	4
32	5
64	6
128	7
256	8
512	9
1024	10

2048	11
4096	12
8192	13
16384	14
32768	15
65536	16
131072	17
262144	18
524288	19
1048576	20
2097152	21
4194304	22
8388608	23
16777216	24
....	....

Obs: A palavra sequência implica em ordenação de objetos quaisquer, daí:

1ª) A coluna da esquerda contém um tipo de sequência numérica denominado *progressão geométrica* (P.G.).
2ª) A coluna da direita contém outro tipo de sequência numérica denominado *progressão aritmética* (P.A.).

Foi da comparação e correspondência entre estes dois tipos de sequência que surgiu o estudo dos logaritmos!

→→ Agora, com o auxílio das três etapas descritas logo a seguir, converta em potências **apenas 4 linhas da tabela**, aquelas que sejam necessárias, e conclua a atividade calculando as operações solicitadas:

1ª) Substitua cada número envolvido nas operações pela potência equivalente;

2ª) Logo após, no item “a” aplique a propriedade $(a^x)^y = a^{x.y}$;

no item “b” utilize a propriedade $\sqrt[y]{a^x} = a^{x:y}$;

3ª) Por fim, substitua a potência resultante pelo correspondente valor da tabela.

a) $(16)^6 =$

b) $\sqrt[3]{2097152} =$

Em relação ao tempo e à precisão dos resultados obtidos, excetuando-se o uso da calculadora, você conhece outro método mais simples do que este?

Comentário: Viana (2024), através de estudos de revisão de literatura e de sua discussão em roda de conversa com professoras de ensino médio (uma das professoras aplicou a atividade em suas turmas), demonstra que a associação de sequências numéricas à introdução do conceito de logaritmo torna sua compreensão mais intuitiva.

Noção intuitiva de sua popularidade original – 1º fator:

Partindo de uma tabela de logaritmos, perceba que os procedimentos das **atividades 2 e 4,** em nova linguagem, correspondem às **propriedades de logaritmos.**

1ª propriedade: Observe que para obter o resultado de (16384) x (4194304), basta **adicionar os logaritmos dos fatores** e teremos o **logaritmo do produto** (que é o resultado da multiplicação anterior):

x	512	16384	262144	4194304	13421772	68719476736
$\log_2 x$	9	14	18	22	27	36

14 + 22 = 36 Resposta = 68719476736

2ª propriedade: Agora, veja que para obter o resultado de (13421772) **:** (512), basta **subtrair ordenadamente seus logaritmos** e teremos o **logaritmo do quociente** (que é o resultado da divisão anterior).

x	512	16384	262144	4194304	13421772	68719476736
$\log_2 x$	9	14	18	22	27	36

27 – 9 = 18 Resposta = 262144

3ª propriedade: Perceba também que para obter o resultado de $(512)^4$, basta **multiplicar o expoente pelo logaritmo da base** e teremos o **logaritmo da potência** (que é o resultado da potenciação anterior).

x	512	16384	262144	4194304	13421772	68719476736
$\log_2 x$	9	14	18	22	27	36

4 x 9 = 36 Resposta = 68719476736

4ª propriedade: E, por fim, se quisermos o resultado de ($\sqrt[2]{68719476736}$), basta **dividir o logaritmo do radicando pelo índice** e teremos o **logaritmo da raiz** (que é o resultado da radiciação anterior):

x	512	16384	262144	4194304	13421772	68719476736
$\log_2 x$	9	14	18	22	27	36

Resposta = 262144 36 **:** 2 = 18

Atividade 5: Com o auxílio da **tabela** e das **propriedades dos logaritmos,** anote o tempo que levará para encontrar os resultados abaixo solicitados**.**

x	256	8192	32768	16777216	137438953472	49755813888
$\log_2 x$	8	13	15	24	37	39

Depois, compare esse tempo com o que investiu na atividade 2. Qual o método mais rápido?

a) (32768) x (16777216) =

c) $(256)^3$ =

b) (137438953472) **:** (8192) =

d) $\sqrt[3]{49755813888}$ =

Comentário: Na pesquisa de Oliveira Junior (2020), o autor sugere que o contato com propriedades operatórias antes de formalizar o conceito de logaritmo torna sua introdução mais intuitiva.

Atividade 6: Faça uma breve busca na internet ou em livros sobre a origem histórica dos logaritmos e escreva um parágrafo que responda as seguintes reflexões:

a) Foi uma invenção individual ou consequência de uma busca coletiva?
b) Sua invenção foi consequência de genialidade ou de esforço?
c) Qual o significado científico e social do seu surgimento?

Comentário: Viana (2024), discutindo essa atividade com professoras de ensino médio (uma das professoras aplicou a atividade em suas turmas) em roda de conversa, mostra que um roteiro de busca sobre a História dos logaritmos é necessário e, quando aplicado após as atividades anteriores, torna o processo de aprendizagem mais eficaz.

Noção intuitiva de sua popularidade original – 2º fator:

Após o surgimento dos logaritmos percebeu-se que, se fossem concebidos relativamente ao que chamamos hoje **base 10**, eles seriam também úteis em outras áreas do conhecimento além da Astronomia e da Navegação. Mas, por que razão?

Porque **números que diferem pela posição da vírgula** tem logaritmos diferentes apenas na parte inteira, denominada **característica**, sendo iguais na decimal, denominada **mantissa**. Veja:

$1 = 10^{0}$
$2 = 10^{0,301}$
$3 = 10^{0,477}$
$4 = 10^{0,602}$
$5 = 10^{0,699}$
$6 = 10^{0,778}$
$7 = 10^{0,845}$
$8 = 10^{0,903}$
$9 = 10^{0,954}$
$10 = 10^{1}$
$11 = 10^{1,041}$
...

Ex₁:

x	$\log_2 x$
2	0,301
20	1,301
200	2,301
2000	3,301

Característica= 0; mantissa= 301

Característica= 1; mantissa= 301

Característica= 2; mantissa= 301

Característica= 3; mantissa= 301

Um modo de reconhecer a característica do logaritmo de certo número “N” é representá-lo em **notação científica**, isto é, pelo produto de um número “a”, situado entre 1 e 10, por uma potência de 10, ou, **N = a.$\mathbf{10^{c}}$**.

Desse modo, o número “**c**” será a **característica** do **logaritmo do número N**.

Já a **mantissa** é **tabelada**! Porém, do latim, a palavra mantissa significa “adição” ou “contrapeso”, então, deve ser **adicionada** ao valor da **característica**.

Ex₂: Dada a mantissa do logaritmo de 778, igual a 891, represente tanto 77800 quanto 0,0778 como potências de base 10:

a) Como 77800 = $7{,}78.10^{4}$ a característica vale 4, então, o logaritmo decimal de 77800 será 4 + 0,891 = 4,891. Consequentemente: 77800 = $10^{4,891}$.

b) Como 0,0778 = $7{,}78.10^{-2}$ a característica vale –2, então, o logaritmo decimal de 0,0778 será –2 + 0,891 = –1,109. Por consequência: 0,0778 = $10^{-1,109}$.

Atividade 7: Observe a tabela de potências e complete a de logaritmos:

$1 = 10^{0}$
$2 = 10^{0,301}$
$3 = 10^{0,477}$
$4 = 10^{0,602}$
$5 = 10^{0,699}$
$6 = 10^{0,778}$
$7 = 10^{0,845}$
$8 = 10^{0,903}$
$9 = 10^{0,954}$

x	Notação científica de x	$\log_{10} x$
60		
400000		
3000		
0,05		
0,000007		
0,0009		

Comentário: Viana (2024), testando esta atividade em turmas de ensino médio e discutindo-a com professoras (uma das professoras aplicou a atividade em suas turmas) em roda de conversa, constata que os conceitos de *característica* e *mantissa* podem auxiliar a fixar o conceito de logaritmo como expoente, desde que haja um acompanhamento prévio em relação ao uso da notação científica.

4. Referências

ALVES, A. M. M.; LOPES, L. S. A abordagem da História da Matemática em livros didáticos: Análise de um livro texto. In: FONSECA, M. S.; FERREIRA, A. L. A.; ALVES, A. M. M.; SILVEIRA, D. N.; LORETO, A. B. (Org.) **Matemáticas:** Educação e Pesquisa. Pelotas: Ed. Da Universidade Federal de Pelotas, 2014.

ÁVILA, G. Como se constrói uma tábua de logaritmos. **Revista do Professor de Matemática - RPM**, Rio de Janeiro (RJ) – n.26, pp.1 a 3, SBM, 1994.

BLANCHÉ, R. **A axiomática.** São Paulo: Martins Fontes,1978.

BOYER, C. B. **História da Matemática.** São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BOYER, C. B. **Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula; v.6.** São Paulo: Atual, 1992.

CARVALHO, J. B. P. Euclides Roxo e as polêmicas sobre a modernização do ensino da matemática. In: VALENTE, V. R. (Org.) **Euclides Roxo e a modernização do ensino da matemática no Brasil.** Brasília: Editora Universidade de Brasília, 2004.

CONTADOR, P. R. M. **Matemática**, uma breve história; v.2. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2006.

COSTA, A. B.; OLIVEIRA, R. F. S.; LOPES, T. B. Dos logaritmos de Napier à mais bela de todas as fórmulas. **BOCEHM**, Fortaleza (CE) – v.4, n.12, p. 26 – 40, dez. 2017.

COSTA, C.; TRALES, P. **Argumentação e conceito de prova em matemática.** Rio de Janeiro: UFF/CEP, 2006.

COTRIM, G.; FERNANDES, M. **Fundamentos de Filosofia.** São Paulo: Saraiva, 2013.

DAVIS, H. T. **Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula.** v. 2**,** São Paulo: Atual, 1992.

EVES, H. **Introdução à história da matemática.** Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.

EVES, H. **Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula; v.3.** São Paulo: Atual, 1992.

GALUPO, A. S. **A construção do conceito de logaritmo**. 2021. Dissertação (Mestrado Profissional), Universidade Federal da Fronteira Sul, Chapecó – SC.102p.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; PÉRIGO, R.; ALMEIDA, N. **Matemática – Ciências e Aplicações v.1.** São Paulo: Atual, 2004.

MIORIM, M. Â. **Introdução à História da Educação Matemática.** São Paulo: Atual, 1998.

MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. **Os logaritmos na cultura escolar brasileira.** Natal: SBHMat, 2002.

MONICO, J. F. G. **Introdução a Geodésica**: perspectiva atual. FCT/UNESP, São Paulo, 2018. Disponível em: http://www2.fct.unesp.br/docentes/carto/galera/FGL/Geod_Definicao.pdf. Acesso em: 16 mai. 2020.

NAUX, C. **Histoire des logarithmes**: de Neper à Euler. Tome I. Paris: Libraire Scientifique et Technique A. Blanchard, 1966.

OLIVEIRA, A. T. P. **Minimanual compacto de literatura portuguesa:** teoria e prática. São Paulo: Rideel, 2003.

OLIVEIRA JUNIOR, R. L. Q. Uma introdução didática aos logaritmos de napier a partir de sua origem histórica. **Cadernos de Educação básica**, v.5, n.2, p.150-169, 2020.

PEREIRA, D. G.; RESENDE, M. R. **Ensino de Logaritmos**: um Diagnóstico da Apropriação do Conceito Discutido à Luz da Teoria Histórico-Cultural. Perspectivas da Educação Matemática, Mato Grosso do Sul, v. 14, n. 34, p. 1-21, 2021.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas.** Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

SANTOS, M. D. P. O ideal de ciência na modernidade: Bacon e Descartes. **Investigação Filosófica.** Macapá, v.1, n.10, p.63-73, 2019.

SCHUBRING, G. **Análise histórica de livros de Matemática:** notas de sala de aula. Campinas, SP: Aurores Associados, 2003.

SERRASQUEIRO, J. A. **Tratado de álgebra elementar.** 7.ed. Coimbra: Livraria central de J. Diogo Pires, 1900.

SOARES, E. C. **Uma investigação histórica sobre os logaritmos com sugestões didáticas para a sala de aula.** 2011. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática), Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal – RN, 142p.

SOARES, L. J. **Sobre o ensino da matemática.** Pelotas: EDUCAT, 1998.

SOUZA, J. C. M. **Dicionário Curioso e Recreativo da Matemática.** Rio de Janeiro: Ed. Getúlio Costa, 1942.

STRUIK, D. J. Por que estudar história da matemática? In: GAMA, R. (Org.) **História da Técnica e da Tecnologia.** São Paulo: EDUSP, 1985.

TAHAN, M. **A lógica na Matemática.** São Paulo: Saraiva, 1966.

VALENTE, V. R. **Uma história da matemática escolar no brasil.** São Paulo: Annablume: FAPESP, 1999.

VIANA, A. R. K. **Uma abordagem histórico-epistemológica para a introdução do conceito de logaritmo a partir da percepção de professoras de Matemática do Ensino Médio.** 2024. Dissertação (Mestrado em Ciências e Tecnologias na Educação), Instituto Federal Sul-rio-grandense de Educação, Ciência e Tecnologia, Câmpus Pelotas – Visconde da Graça, Pelotas - RS, 151p.

VIANNA, J. J. L. **Elementos de Arithmética.** 6.ed. Rio de Janeiro: Clássica de Alves, 1897.

Apêndices

Apêndice 1 - Um esboço sociocultural do contexto europeu

UM ESBOÇO SOCIOCULTURAL DO CONTEXTO EUROPEU

O interesse por estudos relacionados a construção de tábuas numéricas que auxiliassem as necessidades prementes da Astronomia, intensifica-se na Europa num período que a História convencionou chamar Idade Moderna - meados do século XV ao século XVIII -, ao longo da qual outras tantas descobertas matemáticas ocorreram, influenciadas, certamente, não apenas por inspirações matemáticas, mas também por transformações favoráveis nos campos político, econômico, social, religioso e artístico (Struik, 1985).

Nesses séculos, naquela região, houve a formação dos primeiros Estados nacionais modernos absolutistas, com a centralização do poder político pela figura dos reis, atendendo aos interesses da burguesia que precisava de um poder centralizador para garantir as condições de mercado. Constituiu-se assim o Mercantilismo, conjunto de práticas econômicas, que significou a transição gradual do Feudalismo para o Capitalismo, uma vez que o florescimento do comércio promovendo as grandes rotas comerciais através da expansão comercial-marítima possibilitou a chegada dos europeus à América e sua colonização (Cotrim; Fernandes, 2013).

No século XIV, os avanços na Matemática foram quase imperceptíveis. No entanto, do século XV em diante a renovação foi intensa (Eves, 1992). As transformações sociais, nesse período, receberam significativas contribuições culturais denominadas, em seu conjunto, Renascimento. Este movimento, que envolveu artistas e intelectuais de diversas áreas, foi inspirado no humanismo, que surge na península itálica em meados do século XIV, concebido por defensores do reavivamento da cultura greco-romana, bem como de certos ideais de exaltação do ser humano, tais como a razão e a liberdade. (Cotrim; Fernandes, 2013).

> O século XV, período inicial do Renascimento, testemunhou o reaparecimento da arte e do saber na Europa. Com o colapso do Império Bizantino, culminando com a queda de Constantinopla perante os turcos em 1453, refugiados afluíram a Itália, trazendo tesouros da civilização grega. Muitos clássicos gregos, conhecidos até então apenas através de traduções árabes que muitas vezes não eram boas, podiam agora ser estudados nas fontes originais. Também a invenção da imprensa com tipos móveis, por volta de meados do século,

> revolucionou o comércio de livros e permitiu que o conhecimento se difundisse numa velocidade sem precedentes (Eves, 1992, p.14).

A Reforma Protestante (1517) fragmentou a unidade religiosa europeia, procurando romper com a mentalidade conservadora do ser humano em relação aos desígnios divinos, ao reconhecer no trabalho uma fonte concreta de prosperidade e felicidade, além de passar a compreender a razão humana como uma extensão do poder divino, que permitia ao indivíduo certa liberdade e autonomia de pensamento. Dessa forma, a visão teocêntrica, predominante até então, gradualmente foi cedendo lugar à tendência antropocêntrica, mas não sem muitos conflitos (Cotrim; Fernandes, 2013).

A Igreja católica exerceu forte resistência ao Protestantismo, rechaçando-o através da Contra-Reforma, em 1540, monopolizando a educação para difundir a volta da fé irrestrita na autoridade da Igreja e fortalecendo o tribunal da Inquisição, a fim de reprimir manifestações contrárias (Oliveira, 2003).

Acrescente-se que no século XVII, embora economicamente dominante, a burguesia ainda era politicamente subordinada. Assim, o home deste período foi marcado pela tensão destas dualidades, das lutas de classes sociais e de crises religiosas, donde originou-se a Arte Barroca, como expressão dessa realidade (Oliveira, 2003).

Portanto, destacam-se como características fundamentais desse período histórico: o surgimento do *racionalismo*, que ao critério exclusivo da fé e da revelação opôs a razão e a capacidade de livre exame do mundo, inclusive de textos bíblicos; o *saber ativo*, em oposição ao saber contemplativo, buscando o conhecimento não apenas com base em princípios, mas na exploração do mundo real por intermédio de experimentações; e a *busca do método* adequado para investigar a realidade, como principal foco dos filósofos, marcando a cisão gradual da ciência com a filosofia aristotélico-escolástica, a fim de desbravar aos poucos seu próprio caminho (Aranha; Martins, 2009).

Santos (2019), esclarece que embora a influência aristotélico-escolástica ainda perdurasse nas artes mecânicas, marítimas e intelectuais no início do século XVII, dois filósofos, entre outros, exerceram papel decisivo em oposição à esta influência, por caminhos distintos, porém, com um ideal de modernidade em comum, perceptível através “do uso da natureza, da técnica, da importância de Deus e das escrituras para enfatizar como a possibilidade do progresso estava em concordância com o que o Criador permitia ao homem" (Santos, 2019, p.63): Bacon e Descartes.

Ambos buscaram fundamentar a ciência com um método seguro, isento de erros, que eram muito comuns na época. Um deles, Francis Bacon (1561-1626), um empirista inglês, defendeu o clássico método experimental como sendo *o método científico*, que consiste em quatro etapas: observação, hipótese, experiência e generalização, isto é, a elaboração de lei ou teoria (Aranha; Martins, 2009, p.374-378). Argumentava sobre a inovação, o rigor e a repetição das experiências em circunstâncias distintas

> Deve-se buscar não apenas uma quantidade muito maior de experimentos, como também de gênero diferente dos que até agora nos têm ocupado. Mas é necessário, ainda, introduzir-se um método completamente novo, uma ordem diferente e um novo processo, para continuar e promover a experiência. (Bacon, 1999, p. 79)

O outro, René Descartes (1596-1650), um racionalista francês que tinha por base a dúvida metódica, e, justamente por isso, seu método partia de quatro princípios lógicos, que se atendidos com rigor resultariam num conhecimento consistente

> O primeiro era o de jamais acolher alguma coisa como verdadeira que eu não conhecesse evidentemente como tal; isto é, de evitar cuidadosamente a precipitação e a prevenção, e de nada incluir em meus juízos que não se apresentasse tão clara e tão distintamente a meu espírito, que eu não tivesse nenhuma ocasião de pô-lo em dúvida. O segundo, o de dividir cada uma das dificuldades que eu examinasse em tantas parcelas quantas possíveis e quantas necessárias fossem para melhor resolvê-las. O terceiro, o de conduzir por ordem meus pensamentos, começando pelos objetos mais simples e mais fáceis de conhecer, para subir, pouco a pouco, como por degraus, até o conhecimento dos mais compostos, e supondo mesmo uma ordem entre os que não se precedem naturalmente uns aos outros. E o último, o de fazer em toda parte enumerações tão completas e revisões tão gerais, que eu tivesse a certeza de nada omitir" (Descartes, 1996, p. 78, 79).

Nesse contexto, a Matemática ganha certo status cultural, pois já era uma área desenvolvida na época e que, enquanto instrumento de abordagem da natureza, proporcionou significativos resultados aos filósofos que a adotaram, beneficiando-se do seu método lógico-dedutivo. Um dos precursores da Ciência moderna, Galileu Galilei (1564-1642), astrônomo e professor de Matemática da Universidade de Pisa, explicaria o mundo concreto, sensível, através de relações matemáticas, geométricas, procedimento incomum até o momento (Cotrim; Fernandes, 2013).

> Igualmente decisivo tem sido o papel da matemática no processo de mecanização do quadro do mundo, durante o século XVII. Para Galileu, o livro da natureza foi escrito em caracteres matemáticos – as letras são triângulos, círculos e outras figuras geométricas – e pode ser decifrado somente por aqueles que conhecessem a Matemática. Na filosofia de Descartes, a natureza tem que ser explicada em termos de Mecânica, e a Mecânica em termos de Matemática, de tal maneira que o conhecimento desta ciência seja a chave para a compreensão do universo físico (Struik, 1985, p.205).

Culturalmente, a Matemática, de ferramenta de professores de escola, de agrimensores, pilotos, cartógrafos e astrônomos, como era a do século XVI, passa a ser a *rainha das ciências*, permeando inclusive as artes. Spinoza escreveu sua *Ética* a maneira axiomática de Euclides (Struik, 1985).

> Basta voltar o pensamento para pintores como os italianos quatrocentistas e Albert Dürer para compreender que tem havido períodos de conexão intima entre a Matemática e as Artes. Nas escolas desses homens a perspectiva foi desenvolvida e as harmonias sentidas na pintura e na arquitetura foram combinadas na contemplação dos poliedros platônicos ou regulares e suas relações com a chamada secção áurea. Ela preocupou a mente humana desde a antiguidade até o Renascimento, quando Lucca Pacciolli escreveu um livro intitulado *Divina Proportione* (1509) com ilustrações muitas vezes atribuídas à Leonardo da Vinci (Struik, 1985).

Os Elementos era o modelo para pensadores que buscavam um ideal cartesiano de julgamentos claros e distintos. Entretanto, “essa maneira transcendental de encarar a Matemática, de algum modo perdeu-se na atmosfera mais tranquila do Iluminismo” (Struik, 1985).

Em síntese, esse ambiente vivenciado na Europa dos séculos XV, XVI e XVII, decorrente de profundas e graduais mudanças no *Zeitgeist* daquele período, constituiu-se no contexto favorável ao surgimento dos logaritmos, pois oportunizou certos aprimoramentos em determinadas áreas dos conhecimentos filosóficos e matemáticos naquela região, correspondentes ao que mais tarde, no século XVIII, seria denominado Ciência (Cotrim; Fernandes, 2013).

Referências

ARANHA, M. L. A.; MARTINS, M. H. P. **Filosofando:** Introdução à Filosofia. São Paulo: Moderna, 2009.

BACON, Francis (1620). **Novum Organum**. Trad. José Aluysio Reis de Andrade. São Paulo: Editora Nova Cultural, 1999.

COTRIM, G.; FERNANDES, M. **Fundamentos de Filosofia.** São Paulo: Saraiva, 2013.

DESCARTES, René (1637). **Discurso do Método**. Trad. J. Guinsburg e Bento Prado Junior. São Paulo: Editora Nova Cultural, 1996.

EVES, H. **Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula; v.3.** São Paulo: Atual, 1992.

OLIVEIRA, A. T. P. **Minimanual compacto de literatura portuguesa:** teoria e prática. São Paulo: Rideel, 2003.

SANTOS, M. D. P. O ideal de ciência na modernidade: Bacon e Descartes. **Investigação Filosófica.** Macapá, v.1, n.10, p.63-73, 2019.

STRUIK, D. J. Por que estudar história da matemática? In: GAMA, R. (Org.) **História da Técnica e da Tecnologia.** São Paulo: EDUSP, 1985.

Apêndice 2 - Uma distinção entre logaritmos Neperianos e Naturais

UMA DISTINÇÃO ENTRE LOGARITMOS NEPERIANOS E NATURAIS

Inicialmente, caracterizar-se-á o contraste, segundo Contador (2006), entre o número usado por Napier, correspondente ao que atualmente denomina-se base, e o número de Euler (base dos logaritmos naturais). Logo após, será feita uma conjectura sobre a possível razão do polêmico equívoco.

Se Napier não tivesse tido a intenção de evitar frações através do fator 10^7 antecedendo o parêntese na expressão $10000000.\left(1-\frac{1}{10000000}\right)^n$ teríamos, em algum momento:

$$\log_{\left(1-\frac{1}{10^7}\right)} \left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{10^7} = 10^7$$

que é um número muito grande e, no caso, quando n tende ao infinito a potência $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ tende ao número $\frac{1}{e}$, que caracteriza o *logaritmo neperiano*. Já o número e, por definição, corresponde ao limite para o qual tende a expressão $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ quando n tende ao infinito. Isto é, na medida em que n for crescendo, as frações $\left(1-\frac{1}{n}\right)$ e $\left(1+\frac{1}{n}\right)$ tendem a tornar-se números inversos. Observe que os *logaritmos Neperianos* são decrescentes, ao passo que os *logaritmos naturais* são crescentes.

É plausível que o equívoco decorra, historicamente, do apêndice de uma tradução do trabalho original de Napier do latim para o inglês, em 1616 ou 1618, contendo uma tábua de logaritmos naturais, sem vírgula decimal, que fornece para o logaritmo de 10 o valor 2,302584. Ocorre, porém, que a tábua citada não era de Napier, mas provavelmente de William Oughtred, mais tarde ampliada por John Speidell, em 1662, com logaritmos do tipo $10^6.(\ln x)$, com aproximação de seis casas decimais. Já os *neperianos* utilizavam sete casas decimais (Davis, 1992).

Referências

CONTADOR, P. R. M. **Matemática**, uma breve história; v.2. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2006.

DAVIS, H. T. **Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula; v.2.** São Paulo: Atual, 1992.

Apêndice 3 - Um método antigo para o cálculo de logaritmos decimais

UM MÉTODO ANTIGO PARA O CÁLCULO DE LOGARITMOS DECIMAIS

Inicialmente, apresentaremos uma visão mais panorâmica do cálculo de logaritmos decimais realizado por Briggs, segundo Ávila (1994). Sabendo que qualquer número pode ser escrito como o produto de um número entre 1 e 10 por uma potência de 10, bastaria conhecer os logaritmos de número entre 1 e 10 para determinar o logaritmo de qualquer número. Esses foram denominados *mantissas*.

Briggs começou extraindo a raiz quadrada de 10, e também do resultado, bem como dos resultados sucessivos de cada extração seguinte. Realizou esse processo por 54 vezes. Desse modo, obteve os logaritmos de vários números.

Então, foi aumentando a tabela utilizando os resultados já obtidos e a propriedade fundamental: log (a.b) = log a + log b, veja

log ($10^{1:2}$ x $10^{1:4}$) = log ($10^{1:2}$) + log ($10^{1:4}$)
log (3,16228 x 1,77828) = 0,5 + 0,25 = 0,75

Observe que o conhecimento dos logaritmos de “a” e “b” permite calcular o logaritmo de $\sqrt{a.b}$ pela propriedade correspondente (Ávila, 1994).

A seguir, examinaremos em pormenores o antigo método utilizado por Briggs, comum aos calculistas até então, através de uma pequena tábua, tanto com poucos valores quanto com uma quantidade reduzida de casas decimais.

O Método da raiz: (Adaptado de Eves, 2004)

Extraindo-se a raiz quadrada de 10, depois a raiz quadrada desse primeiro resultado, depois a raiz desse segundo resultado e assim por diante, pode-se construir a seguinte tábua, que contém apenas 18 das 54 extrações realizadas por Briggs.

$10^{1/2} = 3{,}16228$	$10^{1/128} = 1{,}01815$	$10^{1/8192} = 1{,}00028$
$10^{1/4} = 1{,}77828$	$10^{1/256} = 1{,}00904$	$10^{1/16384} = 1{,}00014$
$10^{1/8} = 1{,}33352$	$10^{1/512} = 1{,}00451$	$10^{1/32768} = 1{,}00007$
$10^{1/16} = 1{,}15478$	$10^{1/1024} = 1{,}00225$	$10^{1/65536} = 1{,}00004$
$10^{1/32} = 1{,}07461$	$10^{1/2048} = 1{,}00112$	$10^{1/131072} = 1{,}00002$
$10^{1/64} = 1{,}03663$	$10^{1/4096} = 1{,}00056$	$10^{1/262144} = 1{,}00001$

(Tabela adaptada de Eves 2004, p. 367)

1º) Seja N um número entre 1 e 10.

Suponha que queiramos calcular log N com 3 casas decimais.

Ex: N= 4,6 portanto, queremos descobrir $\log_{10}(4{,}6)$ com 3 casas decimais.

2º) Divide-se N pelo maior resultado da tabela, que não exceda N, para obter como quociente um número N_1.

Da divisão (4,6):(3,16228) = 1,45464... ≅ 1,4546 resultará nosso N_1.

OBs: Pede-se resultado com 3 casas decimais. Então, trabalharemos com 4 casas decimais para termos 3 algarismos certos e um duvidoso, o arredondado.

3º) Suponha que o divisor seja o número correspondente a $10^{1/P_1}$. Então $\frac{1}{P_1}$ será a primeira parcela do logaritmo a ser calculado.

Como o divisor foi 3,16228 então a primeira parcela do logaritmo será $\frac{1}{2}$

4º) Repetindo-se o mesmo raciocínio para N_1 e sucessivamente para N_2 , N_3 ,..., N_n até que N_n difira da unidade na quarta casa decimal, ou seja, quando obtivermos N_n=1,000y... onde y≠0, então, poderemos interromper o processo.

$N_1 = 1{,}4546$ → o divisor será 1,33352 e a segunda parcela do logaritmo $\frac{1}{8}$

Da divisão (1,4546):(1,33352) = 1,09079... ≅ 1,0908 resultará nosso N_2.

$N_2 = 1{,}0908$ → o divisor será 1,07461 e a terceira parcela do logaritmo $\frac{1}{32}$

Da divisão (1,0908):(1,07461) = 1,01506... ≅ 1,0151 resultará nosso N_3.

$N_3 = 1{,}0151$ → o divisor será 1,00904 e a quarta parcela do logaritmo $\frac{1}{256}$

Da divisão (1,0151):(1,00904) = 1,00600... ≅ 1,006 resultará nosso N_4.

$N_4 = 1{,}006$ → o divisor será 1,00451 e a quinta parcela do logaritmo $\frac{1}{512}$

Da divisão (1,006):(1,00451) = 1,00148... ≅ 1,0015 resultará nosso N_5.

$N_5 = 1{,}0015$ → o divisor será 1,00112 e a sexta parcela do logaritmo $\frac{1}{2048}$

Da divisão (1,0015):(1,00112) = 1,00037... ≅ 1,0004 resultará nosso N_6.

5º) Como N_6 difere da unidade na 4ª casa decimal, interrompemos o processo e o valor do logaritmo já pode ser obtido satisfatoriamente, basta fazer:

$$\log_{10}(N) = \frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2} + \frac{1}{P_3} + \cdots + \frac{1}{P_n}$$

ou

$$\log_{10}(4{,}6) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{256} + \frac{1}{512} + \frac{1}{2048} = 0{,}6625\ldots \cong 0{,}663$$

Note o(a) colega que esta fórmula final nada mais é do que a aplicação da propriedade do logaritmo do produto sendo transformado em adição, aplicado a fatoração do número N inicial, veja:

$$N = 10^{1/P_1}.\,10^{1/P_2}.\,10^{1/P_3}\ldots\,10^{1/P_n}$$

OBs: O resultado corresponderá ao valor obtido diretamente na calculadora, porém, já arredondado para o número de casas solicitado.

Referências

ÁVILA, G. Como se constrói uma tábua de logaritmos. **Revista do Professor de Matemática - RPM.** Rio de Janeiro, n. 26, p. 1-3, 1994.

EVES, H. **Introdução à história da matemática.** Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.

Apêndice 4 - Escolarização da Matemática e as definições de logaritmo

ESCOLARIZAÇÃO DA MATEMÁTICA E AS DEFINIÇÕES DE LOGARITMO

A criação da Escola Politécnica de Paris, uma nova Escola de Engenharia, foi uma conquista da classe média que produziu suas próprias instituições de saber através da Revolução Francesa. Esta, foi influenciada, entre outros fatores, pela publicação da Enciclopédia de Denis Diderot, obra constituída por 28 volumes (1713-1784) (Valente, 1999; Struik, 1985).

Cerca de vinte anos antes de publicá-la, Diderot convidou um grupo de eruditos franceses para que escrevessem artigos examinando todos os contextos dos novos ensinamentos de Newton (1642-1727). O filósofo e matemático D'Alembert (1717-1783) foi um dos primeiros colegas a lhe acompanharem, escrevendo partes fundamentais dos tomos iniciais (Schubring, 2003). No tomo V (1755), escreveu um exaustivo artigo intitulado *Elementos da Ciência*, influenciando significativamente o despertar das reformas educacionais efetivadas durante a Revolução (Schubring, 2003).

Neste artigo, manifesta seu profundo otimismo quanto à convergência entre o progresso científico e o progresso pedagógico. Em determinado momento, D'Alembert centraliza sua atenção nas definições e em sua função no interior das noções elementares da ciência. Discute como bons livros-textos deveriam ser escritos e examina a relação entre *facilidade de compreensão* e *rigor*, como um ponto fundamental na composição de livros elementares, enfatizando que jamais deveria haver contradição entre ambos (Schubring, 2003).

Nesse contexto, surge um *best seller* mundial que teve mais de 75 edições, desde a publicação em 1770 até 1868, com um expressivo número de edições em outros idiomas. Trata-se do livro *Aritmética*, escrito por Etienne Bézout, membro da Academia de Ciências da França. No início do século XIX foi traduzido para o inglês e adotado nas escolas norte-americanas. Nesta obra encontra-se uma definição de logaritmo já bem mais elementar em relação a definição de Napier, do século anterior (Valente, 1999):

> Logaritmos são números em Progressão Aritmética que correspondem, termo a termo, a uma sequência de números em Progressão Geométrica (Valente, 1999, p.86).

A obra de Bézout continha os germes para um ensino elementar e apresentava ainda os fundamentos de uma Ciência, tanto que no Brasil, por exemplo, viriam textos que buscariam novas alternativas na ordem desses conteúdos, e só aos poucos, eventualmente, algumas variações iriam ocorrer, como no caso da definição de logaritmo encontrada no livro de João José Luiz Vianna, cujos *Elementos de Aritmética* integraram os programas do Ginásio Nacional, tendo o Colégio Pedro II como referência (Valente, 1999):

> Logaritmos são números em progressão por diferenças, correspondendo termo a termo a outros números em progressão por quocientes; havendo sempre na progressão por diferenças um termo zero, que corresponda a um termo igual a um, na progressão por quocientes (Vianna, 1897, p. 231 *apud* Miorim; Miguel, 2002, p. 28).

Observa-se que nesta definição de logaritmos já há indício da busca por um certo *rigor lógico* que caracteriza uma teoria científica, mesmo durante o processo de escolarização da Matemática, pois o termo *rigor lógico* diz respeito a certa precisão nas definições, como ponto fundamental da teoria; porém, esse processo ocorre muito lentamente.

A inserção dos logaritmos entre os tópicos algébricos em nosso país, por exemplo, ocorre só após a Reforma da Educação Brasileira, de 1890, proposta por Benjamin Constant (Soares, 2011). Assim, vemos surgir outra obra bastante influente na escolarização matemática de nosso país e que foi referência no Ginásio Nacional (Colégio Pedro II) de 1891 a 1923. Trata-se da *Álgebra de Serrasqueiro*. O livro do Bacharel em Filosofia pela Universidade de Coimbra e professor de Matemática, José Adelino Serrasqueiro, apresenta nova definição para os logaritmos, agora sob o ponto de vista algébrico (Valente, 1999):

> **Logaritmo de um número** é o expoente da potência a que é necessário elevar uma quantidade positiva, chamada de base, para produzir esse número. Assim, sendo x = log y (base a) por definição teremos y = a^x. (Serrasqueiro, 1900, p. 325 *apud* Miorim; Miguel, 2002, p. 97).

O primeiro período do desenvolvimento da Matemática escolar em nosso país, denominado *clássico ou tradicional*, transcorreu de 1730 a 1930.

Até 1929, o ensino e os exames de Aritmética, Álgebra e Geometria eram feitos separadamente. Nessa época, porém, um decreto que dizia respeito apenas ao Colégio Pedro II, autorizou a introdução das ideias modernizadoras do ensino da Matemática em nosso país e, com elas, ocorreu a unificação desses três ramos das Matemáticas numa única componente curricular denominada Matemática (Miorim, 1998).

Essas ideias modernizadoras – Primeiro Movimento Internacional para a Modernização do Ensino da Matemática – influenciaram o segundo período da Matemática escolar brasileira, o período da *escola nova*, que iria de 1930 até 1971; e surgiram por consequência do rápido desenvolvimento da Matemática durante o século XIX, que nas últimas décadas originou uma imensa estrutura dividida em vários ramos conhecidos apenas por especialistas. Assim, surgiram tanto as sociedades nacionais especializadas quanto os periódicos e encontros internacionais (Miorim, 1998).

O objetivo fundamental desse Movimento era diminuir o descompasso entre o ensino secundário e o universitário, defendendo um ensino que partisse da intuição e que só aos poucos apresentasse o raciocínio lógico, priorizando a descoberta e não a memorização. Propunha também a introdução do conceito de função no nível secundário, o elemento unificador dos diferentes conteúdos; porém, em geral, isso ficou relegado apenas aos capítulos finais da última série (Miorim, 1998).

A próxima reforma educacional nacional, a Reforma Francisco Campos (1930), acataria para o ensino secundário as ideias modernizadoras introduzidas pelo Colégio Pedro II. Daí por diante, a definição de logaritmos passaria a ser estritamente algébrica. Portanto, os logaritmos foram estudados tanto no campo da Aritmética quanto no campo da Álgebra de 1891 a 1930, e, posteriormente, apenas em termos algébricos (Soares, 2011; Carvalho, 2004).

> Os logaritmos podem originar-se no cálculo dos valores, onde eles derivam de duas progressões, sendo uma geométrica e outra aritmética, ou na álgebra, onde eles são considerados como expoentes a que é necessário elevar uma certa base para obter todos os números possíveis (Alves, 1918, p. 339 *apud* Miorim; Miguel, 2002, p. 97).

O Primeiro Movimento Internacional para a Modernização do Ensino da Matemática foi a primeira tentativa organizada envolvendo vários países, mas o descompasso entre os avanços científicos e a Matemática ensinada nas escolas de nível secundário seria intensificado. Esse foi novamente um dos mais fortes argumentos utilizados pelos defensores de um segundo movimento que viria ocorrer mais tarde: o *Movimento da Matemática Moderna*, que marcou a terceira fase da Matemática escolar brasileira, a partir de 1971 (Miorim, 1998).

Por outro lado, as primeiras ideias modernizadoras não foram absorvidas de imediato. Diferentes compreensões podem ter levado alguns autores à certa flexibilização na conceituação, já que um dos objetivos era tornar o ensino mais intuitivo. Daí porque, encontramos em 1966 – *A Lógica na Matemática* – o matemático Melo e Souza (Malba Tahan) investigando, explicando e discutindo, sobre vários ângulos, conceitos e definições de outros autores; buscando estabelecer certos parâmetros para definições e sintetizando-os em *leis gerais*, que diziam respeito a noção de *rigor lógico*:

I) Lei da "reflexibilidade da definição":

A definição deve substituir rigorosamente o objeto definido.

II) Lei da "clareza da definição":

A definição deve ser mais clara do que o definido.

III) Lei da "autenticidade da definição":

O definido não deve entrar na definição.

IV) Lei da "concisão da definição":

A definição deve ser breve.

V) Lei da "legitimidade da definição":

Na definição só podem figurar conceitos simples, já conhecidos, ou conceitos admitidos sem definição.

VI) Lei do "conteúdo da definição":

A definição não deve ser deficiente nem superabundante.

VII) Lei da "determinação da definição":

A definição deve convir ao definido e só ao definido.

Assim, as *definições* constituem-se no principal componente da noção de *rigor lógico*, pois a partir delas é que se examina o *rigor* das demonstrações de *teoremas* em épocas distintas. Isto é, não se pode examinar o *rigor* matemático de um período histórico com critérios de *rigor* de um outro período qualquer.

A fim ilustrar em pormenores a noção de *rigor lógico*, vamos examiná-la em relação à definição de logaritmos atualmente difundida, alcançada somente após o Movimento da Matemática Moderna, que começou a materializar-se com a introdução de símbolos lógicos na década seguinte, através da LDB 5692, de 1971, a partir da qual a teoria dos conjuntos foi largamente utilizada nos livros didáticos e o estudo das funções passou a ocorrer desde as séries iniciais do ensino secundário, a fim de conectar os diferentes campos da Matemática.

Conceituemos definição e alguns de seus atributos:

Definir significa tanto enunciar a *compreensão* precisa de um *conceito*, quanto *delimitar* o ângulo de abordagem desse *conceito*.

I) A definição "visa, como o seu nome o sugere, *delimitar a compreensão* de uma ideia, mas também estabelecer uma *equivalência lógica* entre um novo termo e um conjunto de termos introduzidos anteriormente" (Blanché, 1987).

II) "De acordo com as normas aristotélicas, a *definição* deve conter as condições necessárias e suficientes para demonstrar todas as propriedades do objeto, da relação, ou do ser definido" (Tahan, 1966, p. 24).

Analisemos a atual definição:

$$\log_b(a) = x \leftrightarrow a = b^x \;/\; a \in (0, +\infty) \quad e \quad b \in (0, +\infty) - \{1\}$$

Perceba que essa *definição analítica* ilustra perfeitamente os atributos do item **I**, porque pela *equivalência* e pelo *campo de existência* de "a" e "b", *delimita a compreensão* da ideia traduzindo-a numa *exponenciação*, já conhecida.

Por outro lado, ilustra também os atributos do item **II**, porque através das *propriedades de potências* permite a demonstração de *extensões úteis desse conceito,* tais como suas *propriedades operatórias* e sua *mudança de base*.

Por conseguinte, o processo de escolarização da Matemática visou, ao longo do tempo, o desenvolvimento de definições cada vez mais elementares, no entanto, gradualmente, foi buscando um vínculo cada vez maior com o caráter científico. O atual estágio de definição dos logaritmos encontra-se, certamente, em um grau bastante satisfatório de conciliação entre o que é elementar e científico. No entanto, o rigor lógico necessário para se chegar nesta definição, pode gerar um formalismo excessivo para a compreensão, sobretudo para estudantes da educação básica, daí a perspectiva de nosso texto de apoio:

suavizar um pouco esse *rigor lógico* (que é seguido quase automaticamente) através de noções mais intuitivas, menos formais e mais contextualizadas historicamente.

Referências

BLANCHÉ, R. **A axiomática.** São Paulo: Martins Fontes,1978.

CARVALHO, J. B. P. Euclides Roxo e as polêmicas sobre a modernização do ensino da matemática. In: VALENTE, V. R. (Org.) **Euclides Roxo e a modernização do ensino da matemática no Brasil.** Brasília: Editora Universidade de Brasília, 2004.

MIORIM, M. Â. **Introdução à História da Educação Matemática.** São Paulo: Atual, 1998.

MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. **Os logaritmos na cultura escolar brasileira.** Natal: SBHMat, 2002.

SCHUBRING, G. **Análise histórica de livros de Matemática:** notas de sala de aula. Campinas, SP: Aurores Associados, 2003.

SOARES, E. C. **Uma investigação histórica sobre os logaritmos com sugestões didáticas para a sala de aula.** 2011. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática), Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal – RN, 142p.

STRUIK, D. J. Por que estudar história da matemática? In: GAMA, R. (Org.) **História da Técnica e da Tecnologia.** São Paulo: EDUSP, 1985.

TAHAN, M. **A lógica na Matemática.** São Paulo: Saraiva, 1966.

VALENTE, V. R. **Uma história da matemática escolar no brasil.** São Paulo: Annablume: FAPESP, 1999.