Texto de Apoio a Docentes: introdução aos logaritmos através de uma abordagem histórica

Almiro Rodolfo Kmentt Viana

Vinicius Carvalho Beck

PPGCITED
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS NA EDUCAÇÃO

INSTITUTO FEDERAL
Sul-rio-grandense
Câmpus
Pelotas - Visconde da Graça

Ficha Técnica

Autores

Almiro Rodolfo Kmentt Viana
Vinicius Carvalho Beck

Design

Equipe Proedu

Ficha Catalográfica

V614t Viana, Almiro Rodolfo Kmentt

Texto de Apoio a Docentes: Introdução aos logaritmos através de uma abordagem histórica/ Almiro Rodolfo Kmentt Viana, Vinicius Carvalho Beck. – 2024.
45 f. : il.

Produto educacional (Mestrado) – Instituto Federal Sul-Rio-Grandense, Câmpus Pelotas Visconde da Graça, Programa de Pós - graduação em Ciências e Tecnologias da Educação, 2024.

1. Tecnologias na educação. 2. Matemática. 3. História da matemática. 4. Ensino de logaritmos. I. Beck, Vinicius Carvalho (aut.). II. Título.

CDU: 378.046-021.68:51

Catalogação na fonte elaborada pelo Bibliotecário
Vitor Gonçalves Dias CRB 10/1938
Câmpus Pelotas Visconde da Graça

Este template é uma cooperação entre Proedu (proedu.rnp.br) e PPGCITED

Sumário

1. Apresentação

Este Texto de Apoio tem por objetivo contribuir com colegas docentes para o aprimoramento de atividades pedagógicas relacionadas a introdução do conceito de logaritmos através de um enfoque histórico; muito embora pretenda disponibilizar reflexões que assegurem a possibilidade de abordagem da História da Matemática no ensino de quaisquer outros conteúdos.

Mas, por que a escolha dos logaritmos e da etapa de introdução?

A simbologia, que tem por fim comunicar conceitos com clareza, elegância e precisão, eventualmente pode revelar-se uma sobrecarga, comprometendo a boa compreensão do conteúdo, podendo ocasionar certa aversão do aluno pela Álgebra, especialmente se a fase introdutória, de conceituação, não for bem encaminhada. É necessário que o estudante perceba, pela própria experiência, que a notação favorece o raciocínio (Polya, 2006). Em especial, no caso da função logarítmica temos um adicional de vulnerabilidade à simbologia, pois, é bem plausível que uma potência varie segundo a variação do expoente, porém, nem um pouco intuitivo que o expoente dependa da potência!

Daí decorre a necessidade de uma introdução bem mais intuitiva do conceito, investindo um tempo maior do que o habitual, o que nos parece uma boa oportunidade para que o aluno vivencie a demanda histórica do conceito, ampliando sua compreensão sobre a evolução da Matemática e sua habilidade interpretativa, familiarizando-se assim de modo mais gradual com a simbologia e aproximando-se intuitivamente do significado das propriedades operatórias, antes mesmo de chegar à formalização da definição. Isso, possivelmente, lhe permitirá maior segurança nas etapas mais abstratas do estudo do tema.

Ao elaborar este texto de apoio nos colocamos na posição de meros colaboradores que compõem uma equipe de trabalho. Se conseguirmos, em conjunto, inspirarmo-nos, bem como inspirar minimamente alguns de nossos estudantes, já nos sentiremos regiamente recompensados. Com votos de boa leitura,

os autores.

2. A invenção dos logaritmos

O desenvolvimento da computação (ato de calcular) está vinculado ao convívio humano desde os tempos mais longínquos, relacionado diretamente as suas necessidades de sobrevivência.

> Entre povos primitivos a computação atendia a duas necessidades primárias. A primeira era a necessidade de enumerações básicas em transações comerciais, tais como a contagem de rebanhos, troca de moedas e partilha de terras. A outra era a necessidade de um calendário pelo qual o homem pudesse manter um registro das estações. “Na ocasião em que as Plêiades começarem a se elevar, comece sua colheita”, diz Hesíodo (século VIII a.C.), “e volte a arar quando elas começarem a se pôr. As Plêiades permanecem ocultas por quarenta noites e quarenta dias”. O homem, então, voltava os olhos para o céu. O movimento da lua era cuidadosamente medido (Davis, 1992, p.1).

Os primeiros habitantes das margens do Rio Nilo, também necessitavam observar a época das cheias cujo início ocorria, aproximadamente, na ocasião em que Sírio surgia junto com o Sol. Nessas primeiras demandas estão situadas as origens mais remotas da construção de tábuas numéricas (Davis, 1992).

No entanto, o interesse por tais estudos intensificou-se na Europa, entre os séculos XV e XVII, em razão da influência prática dos muitos campos nos quais os cálculos numéricos eram imprescindíveis, tais como o comércio, a navegação, a Astronomia e a Agrimensura, havendo uma surpreendente demanda para que eles se tornassem mais rápidos e precisos (Eves, 1992).

> O século XVI, precedente ao da descoberta dos logaritmos, foi um período de intensa revolução em diferentes campos científicos. Dentre eles, se destacavam a astronomia e a ciência geodésica. Observamos que geodésica é a ciência que estuda as dimensões e a forma terrestres e seu campo gravitacional. Um de seus objetivos é fazer um mapeamento da Terra e calcular a distância entre pontos distintos sobre o globo terrestre (Monico, 2018). Esses dois campos foram muito importantes, por exemplo, para as Grandes Navegações que ocorreram nos séculos XV e XVI, pois exigiam dos exploradores que se aventurassem por um mar inexplorado: o Oceano Atlântico. Para tal feito, eles precisavam, de alguma forma, se localizar neste mar, e observar a posição dos astros no céu era a única maneira para isso. Desta forma, era necessário conhecer, com a maior precisão possível, as medidas da Terra e a distância entre pontos situados em posições diferentes do globo terrestre (Oliveira Junior, 2020, p. 4).

Com o acúmulo do capital comercial e emergência da burguesia, no plano socioeconômico, houve a necessidade de ampliação das rotas comerciais, o que se tornou possível, entre outros fatores, pelo impulso de investimentos desta burguesia nos estudos de Astronomia; esta, por sua vez, auxiliava a navegação na busca de novos mercados econômicos, gerando lucros que retornavam e enriqueciam cada vez mais os burgueses (Costa; Oliveira; Lopes, 2017).

O desenvolvimento econômico do período e as transformações sociais consequentes receberam contribuições culturais denominadas, em conjunto, Renascimento. Este, foi favorecido por uma invenção técnica já conhecida no Oriente: a imprensa; que se expandiu rapidamente, sendo essencial para difundir as obras clássicas e as modernas a um público mais amplo, conhecimento há muito apenas nas mãos do clero (Aranha; Martins, 2009).

No cálculo com frações, por exemplo, que era um problema da maior importância desde a antiguidade, nossos atuais métodos não foram alcançados tão rapidamente. As primeiras obras impressas mostram que apenas no século XVI é que o traço de fração passou a ser adotado e que não era incomum encontrar frações tais como $\frac{3345312}{4320864}$, o que dificultava as operações. O mesmo ocorria na Astronomia onde, até então, as tabelas continham frações sexagesimais, ou seja, o denominador era uma potência de 60 (Davis, 1992).

Aos poucos, alguns matemáticos foram constatando que operações com frações tipo $\frac{100012}{100000}$, com potência de 10 no denominador, eram mais simples. No final deste período, em 1585, foi publicado na Holanda um livreto de sete páginas, intitulado "*O décimo*", que explicava as frações decimais, amenizando um pouco as dificuldades computacionais dos cientistas. Outro livro sobre o tema apareceu em 1592 na Suíça; e um terceiro em 1603 na Alemanha (Davis, 1992).

Um sistema numérico e uma notação adequados são considerados pré-requisitos para a computação; porém, embora o sistema indo-arábico já tivesse sido introduzido na Europa e fosse um elemento facilitador de alguns cálculos, várias foram as representações até que a ideia dos números decimais fosse bem compreendida. Por exemplo, para 5,912 escrevia-se $5_0 9_1 1_2 2_3$ ou $5/\underline{912}$ ou $\frac{0123}{5912}$, e outras mais; sendo a forma atual estabelecida satisfatoriamente apenas no início do século XVIII (Davis, 1992).

2.1 Um perfil das primeiras abordagens

Igualmente, aos poucos, foram surgindo comparações entre sequencias numéricas:

1	2	4	8	16	32	64	128	256	512...	2^n...(P.G.)
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9...	n ...(P.A.)

nas quais o produto de dois termos da 1ª sequência (progressão geométrica) poderia ser localizado através da soma dos correspondentes na 2ª sequência (progressão aritmética). Por exemplo, se quiséssemos saber o valor de 8x32, ao invés de multiplicá-los, bastaria realizar a adição dos correspondentes na 2ª sequência, isto é, 3+5 e após identificar o correspondente da soma 8 na 1ª sequência, ou seja, 256. Portanto, essas tabelas já tinham o embrião das tábuas de logaritmos (Iezzi et al, 2002).

Assim, foi sendo percebido, gradualmente, que tabelas dessa natureza, com potências de mesma base em correspondência com seus expoentes – já manejadas por Arquimedes de Siracusa na antiguidade (Contador, 2006) –, simplificariam as operações, substituindo multiplicações por adições e divisões por subtrações. Contudo, desta percepção à construção de uma tabela efetivamente abrangente, ainda havia um enorme desafio pela frente, que foi sendo aos poucos subjugado, através de muitos equívocos e êxitos sucessivos: era necessário diminuir as lacunas entre os números da tabela (Soares,1998).

É importante destacar que a tabela apresentada em 1484 pelo matemático francês Nicolas Chuquet (Iezzi Et al, 2002) – como também outras semelhantes e comuns na época (Contador, 2006) – contém grandes intervalos entre os termos, não contemplando sequer a multiplicação de 17 por 119. Todavia, o motivo é bem simples: quem determina a proximidade dos termos é a razão da P.G., que sendo igual a 2 afasta cada vez mais os mesmos.

Então, alguns matemáticos do século seguinte passaram a explorar sequências dessa natureza para números fracionários. É possível, portanto, que muitas das tentativas de construção de tábuas semelhantes à essa, praticadas nesse período, tenham procurado situar a razão da P.G., tanto quanto possível, nas vizinhanças do número 1, elemento neutro da multiplicação, a fim de aproximar termos sucessivos satisfatoriamente; o que refletiu nos trabalhos daqueles que são considerados “os inventores dos logaritmos” (Struik, 1985).

Raramente na História da Matemática um resultado é fruto do trabalho de uma única pessoa, embora muitas das fórmulas, teoremas e outros feitos sejam conhecidos por um nome específico. Esse tipo de homenagem nem sempre mantém coerência com quem mais contribuiu com o assunto, isso quando se chega a saber quem mais contribuiu. Entre os candidatos estão aqueles que tornaram os conceitos melhor compreendidos; os que tornaram os resultados mais relevantes por uma aplicação; os que publicaram primeiro, acelerando a divulgação; sendo menos comum referências à precursores (Boyer, 1992).

No caso dos logaritmos, embora haja consenso acerca da prioridade de publicação da tabela em 1614 pelo escocês John Napier (1550-1617) – *Marifice logarithmorum canonis descriptio* (*Uma descrição da maravilhosa regra dos logaritmos*) –, é possível que tanto a persistência do autor, que investiu vinte anos na realização desta tarefa, quanto o seu esforço em divulgá-la, preparando uma obra complementar sobre o mecanismo de construção, publicada postumamente, em 1619 – *Marifice logarithmorum canonis constructio* (*A construção dos maravilhosos logaritmos canônicos*) –, tenham sido fatores igualmente relevantes. Isto porque, também há consenso a respeito de um trabalho independente realizado pelo contemporâneo suíço Jobst Bürgi, publicado pouco depois, em1620 (Boyer, 1992).

Em que pese a justiça da homenagem, preferimos fomentar, de algum modo, o encontro de certo equilíbrio entre o mérito dos autores destacados e a força da influência cultural daqueles tempos; uma vez que, em decorrência das contribuições renascentistas às transformações sociais, a Matemática adquiriu papel fundamental para os filósofos da época (Struik, 1985); o que se procurou caracterizar no texto complementar do Apêndice 1 de texto. Além disso, conforme já mencionado, entre os séculos XV e XVII, ocorreu a maior atividade no que se refere a produção de tabelas numéricas até então (Davis, 1992); sendo muito comum a construção de tábuas trigonométricas, que eram normalmente direcionadas a astrônomos cujo excesso de cálculos e obstáculos operacionais acarretavam morosidade no trabalho e erros inevitáveis (Contador, 2006).

2.2 Aspectos mais específicos da invenção

Uma curiosidade, que ilustra as dificuldades enfrentadas no período das primeiras obras conhecidas, é que em nenhuma delas se utilizou a notação decimal, nem mesmo exponencial, que só seria adotada correntemente algumas décadas após. Bürgi, por exemplo, utilizou-se da representação $1 + \frac{1}{10000000}$ como razão de uma Progressão Geométrica (P. G.) em um livro (Davis, 1992).

Napier, generalizando a ideia de seus predecessores, constrói uma tabela a partir da razão $10000000.\left(1 - \frac{1}{10000000}\right)^{n}$, sem posicionar o expoente n, apenas registrando-o na tabela e, mais tarde, denominando-o logaritmo. A base 0,9999999 representada no interior do parêntese, era na época um conceito ainda inexistente. Já 10000000 que antecede o parêntese era utilizado para evitar frações ou casas decimais ainda não representadas com segurança (Eves, 2004). Conforme Davis (1992), a razão pela qual às vezes identificam-se logaritmos neperianos como naturais têm origem histórica (no Apêndice 2 deste texto de apoio aprofundamos mais essa discussão).

Há certo consenso que Napier, assim como alguns dos seus contemporâneos, compreendeu quase que imediatamente a importância dos números decimais; pois, em 1615 – com a visita do colega e admirador Henry Briggs (1561-1631), professor universitário em Londres e em Oxford – aceitou a sugestão de aprimoramento da invenção dos números decimais, que tornaria mais prático o emprego dos logaritmos, necessitando porém de duas convenções teóricas: a de que o logaritmo de 1 fosse igual à zero; e a de que o logaritmo de 10 fosse igual à 1. Isto equivaleu ao uso inicial do que, mais tarde, seria a base 10, isto é, dos logaritmos decimais. Além disso, na versão inglesa de seu trabalho original, em 1616 ou 1618, Napier adotou e sugeriu a utilização de um ponto como separatriz decimal (Davis, 1992).

Briggs publicou, logo em seguida, em 1617, sua primeira tábua contendo os logaritmos decimais dos números de 1 a 1000, com quatorze casas decimais de precisão; porém, seguiu adiante, ampliando essa tabela até o ano de 1624, quando apresentou sua obra mais abrangente: *Arithmetica Logarithmica* (Contador, 2006).

> Briggs pôs-se a trabalhar com grande zelo, e em 1624 publicou tábuas de logaritmos dos números de 1 a 20000 e de 90000 a 100000 com quatorze casas decimais / Davis *et al*.:I, 35-38/. A lacuna entre 20000 e 90000 foi preenchida por Adrien Vlacq, que, no entanto, reduziu o número de casas para dez. Além desses cálculos, Vlacq deu os logaritmos de senos, tangentes e secantes para cada minuto de arco, Seu trabalho foi publicado em 1628 como uma segunda edição das tábuas de Briggs (Davis, 1992, p.21).

Em relação aos métodos computacionais, sem dúvida, os mais significativos recursos, desde a antiguidade, foram os de extração de raízes quadradas. Tal relevância é evidente na engenhosa construção de tábuas trigonométricas mais antigas. Pode-se dizer que até o século XVII estes dispositivos permaneceram como instrumentos de excelência dos calculadores; estando vinculados, de igual modo, a obtenção dos logaritmos decimais por Briggs e seus contemporâneos, o que se procurou descrever em maiores detalhes no Apêndice 3 deste texto. Só após a descoberta do Cálculo Diferencial e Integral, no final do século XVII, é que novos recursos foram disponibilizados aos calculadores (Davis, 1992).

Entretanto, durante quase quatro séculos, os logaritmos exerceram, no mínimo, a função das atuais calculadoras, pois os cálculos ganharam em simplicidade, agilidade e precisão (Eves, 2004).

> A maravilhosa invenção de Napier foi entusiasticamente adotada por toda a Europa. Na astronomia, em particular, já estava passando da hora para essa descoberta; pois, como afirmou Laplace, a invenção dos logaritmos "ao diminuir o trabalho, dobrou a vida dos astrônomos" (Eves, 2004, p. 346).

Há também razoável consenso de que as fórmulas de *Prostaférese* utilizadas desde o final do século XV, para transformar multiplicações de algumas funções trigonométricas em adições e subtrações, estavam já bem difundidas no século XVII, refletindo-se nas tábuas de Napier, construídas com objetivo de auxílio prático aos cálculos astronômicos, contendo assim logaritmos de senos de ângulos (Eves, 2004).

2.sen(a).cos(b) = sen (a + b) + sen (a – b)	2.sen(a).sen(b) = cos (a – b) – cos (a + b)
2.cos(a).sen(b) = sen (a + b) – sen (a – b)	2.cos(a).cos(b) = cos (a + b) + cos (a – b)

Assim, o primeiro termo da P.G. de Napier, igual a 10000000, cujo logaritmo valia zero, era o seno de 90º (lembrando que nessa época ainda não era consenso adotar 1 para o seno máximo, e Napier, por exemplo, adotou 10000000 como raio de sua circunferência tomada como referência trigonométrica**)**, na época com a vírgula decimal suprimida. Os termos restantes de sua P.G., ou seja, o segundo termo 9999999 cujo logaritmo valia 1, o terceiro termo 9999998,0000001 cujo logaritmo valia 2, assim como os demais, eram os senos dos demais ângulos, para minutos sucessivos de arco, com aproximação de sete casas decimais (Davis, 1992).

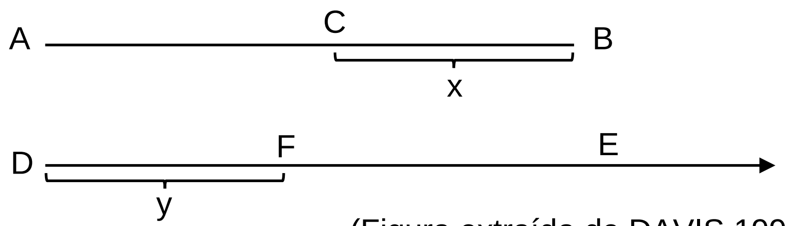
Entretanto, a abordagem de Napier foi inteiramente diferente da *Prostaférese*, pois foi realizada a partir da associação de termos de uma P.G., utilizando-se inclusive, quando necessário, de interpolação (Eves, 2004).

2.3 Uma breve reflexão sobre a definição e a heurística

Embora estejamos nos detendo no trabalho de Napier, não se deve incorrer no equívoco de deixar transparecer qualquer espécie de culto aos heróis, o que seria uma forma simplista e reducionista de abordar a Historiografia da Matemática, tendo em vista que o raciocínio dos inventores dos logaritmos, na realidade, possivelmente foi uma apropriação dos saberes de antecessores e contemporâneos sobre o tema (Alves; Lopes, 2014).

É curioso notar que, por vezes, essa simplificação e redução reflete-se também na interpretação de certas *definições* históricas, que são cultuadas como se fossem *heurísticas* (modos de pensar e deduzir proposições). Nesse caso, há que se ter alguma parcimônia quanto ao exame do significado da definição apresentada na obra de Napier; o que se pretende ilustrar através de uma breve análise, em auxílio da qual disponibilizou-se o Apêndice 4 deste texto, contendo esclarecimentos complementares.

Segundo Davis (1992), o autor chegou a seus logaritmos considerando as velocidades de dois pontos movendo-se na mesma direção. Um deles, o ponto C, movendo-se sobre o segmento de reta $\overline{AB}$, com velocidade decrescente e proporcional a sua distância x de B, e o outro, o ponto F, movendo-se sobre uma semi-reta $\overrightarrow{DE}$, com velocidade constante e igual a velocidade inicial do ponto C, conforme a figura a seguir.



(Figura extraída de DAVIS 1992, p. 21)

Adotando o comprimento $\overline{AB}$ igual a 10000000 (suprimindo a vírgula) e os pontos C e F como posições observadas num mesmo instante, Napier definiu o comprimento y como o logaritmo neperiano do comprimento x. Isto é, para Davis (1992), esta definição físico-geométrica apresentada na obra, associando duas séries de números, teria sido a “origem das ideias de seu autor”.

Presume-se que essa interpretação encontre suas raízes tanto na denominação original que tais números receberam – números artificiais – quanto na influência que as obras gregas clássicas exerceram sobre a cultura matemática daquela região durante o Renascimento. A obra *Os Elementos*, uma sistematização do conhecimento geométrico da antiguidade organizada por Euclides (330 a.C.- 260 a.C.), por exemplo, foi referência de *rigor lógico* até fins do século XIX, e sabe-se que a noção de *rigor lógico* está vinculada às *definições* adotadas em cada época (Struik, 1985).

> [...] da definição de logaritmo acima, Napier expressou a relação fundamental de seus logaritmos: se $a : b = c : d$, então: $\log(a) - \log(b) = \log(c) - \log(d)$. A partir dela, ele demostra outras propriedades como, se $b = c$, então $2.\log(b) = \log(a) + \log(d)$. Nota-se, portanto, que as fórmulas obtidas por Napier são bem diferentes das que são vistas no Ensino Médio. Isto se deve ao fato de Napier tentar obter fórmulas que se adaptassem à estrutura das regras dadas às proposições de Trigonometria, que eram expressas em proporções do V livro de Euclides (Naux, 1966, p. 47).

Recordemos que Euclides não se utilizou de conceitos primitivos pelo fato de que a Geometria para os gregos, embora houvesse avançado em abstração, ainda era uma tentativa de análise lógica do espaço físico idealizado. Daí, ter dito que ponto era aquilo que não tinha partes – *uma idealização de partículas muito pequenas* – e reta era um comprimento sem largura, uma *idealização de linhas retilíneas muito finas* (Eves, 2004).

Sob este aspecto, o modo peculiar como a obra apresenta formalmente os logaritmos pode, de fato, ter sido uma idealização original do autor sobre a comparação de duas sequências numéricas.

Entretanto, aquilo que se denomina *raciocínio heurístico* é algo que não se considera final nem rigoroso, mas apenas provisório e plausível, “assim como andaimes são necessários a construção de um edifício” (Polya, 2006, p.152), tendo por objetivo intermediar a elaboração de uma solução, demonstração ou problema em geral, o que não exclui a construção de uma definição.

Além disso, desde o surgimento de *Os Elementos*, definições ocupavam o topo das teorias dedutivas e possuíam um papel muito significativo quanto ao *rigor lógico*. Isto é, “para evitar, a todo o momento, a descrição de um objeto pela lista das suas propriedades, lança-se mão de uma definição adequada e as propriedades estarão agregadas” (Costa; Trales, 2006).

Em que pese Napier ter coroado seu longo trabalho de vinte anos com uma definição que tão somente reflete, a princípio, o *rigor lógico* característico da cultura matemática de seu tempo (Struik, 1985); não se deve desconsiderar a possibilidade de que o tenha feito senão após completar a tabela, ao menos, durante a fase final de sua construção; tendo em vista que, naquele período, houve predomínio de atividade matemática na Aritmética, na Álgebra e na Trigonometria, podendo daí terem surgido as primeiras ideias (Eves, 2004). Nesse caso, pode-se ainda acrescentar um curioso argumento utilizado na Geometria, porém, bastante oportuno para a definição em exame:

> Alguns matemáticos afirmam que só podemos definir uma certa figura depois de demonstrarmos que essa **figura existe** realmente. Admitamos, que seja formulada a seguinte definição: Chama-se heptaedro regular ao poliedro regular de sete faces. Ora, um poliedro regular de sete faces não existe, e a definição não pode ser admitida (Souza, 1942).

O que significa ser perfeitamente plausível que tal definição tenha sido elaborada após obter, ao menos, as primeiras aproximações satisfatórias entre os valores de sua extensa tabela numérica. Ademais, antes de publicar sua tábua, Napier cunhou o neologismo “logaritmos”, forjado a partir de dois radicais gregos: logos (razão) e arithmos (número); possivelmente, uma referência à razão da progressão (Eves, 2004), ou mesmo, à influência que as sequências numéricas exerceram como fonte do raciocínio heurístico.

Em síntese, pode-se afirmar, certamente, apenas que sua definição foi o ponto de partida para a apresentação de sua teoria, mas nada além disso! Pois existem bons motivos para compreender qualquer que tenha sido sua heurística.

3. Atividades para sala de aula

Propomos, a seguir, sete atividades que podem auxiliar estudantes que estão tendo o primeiro contato com o conceito de logaritmo, ou revisitando-o, com o intuito de compreender mais seu significado a partir de uma contextualização histórica.

Noção intuitiva de seu propósito original:

Atividade 1: Sem fazer uso de recursos tecnológicos digitais ou de tabelas, anote o tempo total dispendido para realizar as duas operações solicitadas a seguir.

a) 8192 x 1048576 = b) 8589934592 **:** 64 =

Comentário: Viana (2024), testando esta atividade em turmas de ensino médio e discutindo-a com professoras (uma das professoras aplicou a atividade em suas turmas) em roda de conversa, mostra que para sua aplicação pode ser necessário o acompanhamento do docente como facilitador.

Atividade 2: Anote o tempo que levará nesta nova atividade, para compará-lo tanto com o da atividade anterior, quanto com o da atividade 5, mais tarde.

$64 = 2^6$
$8192 = 2^{13}$
$1048576 = 2^{20}$
$134217728 = 2^{27}$
$8589934592 = 2^{33}$
$549755813888 = 2^{39}$

Agora você resolverá os itens anteriores por um outro método, que consiste em três etapas:

1ª) Usando a tabela acima, substitua cada número envolvido nas operações pela sua potência correspondente;

2ª) Logo após, no item "a" aplique a propriedade $a^x . a^y = a^{x+y}$;

no item "b" utilize a seguinte propriedade $a^x : a^y = a^{x-y}$;

3ª) Por fim, substitua a potência resultante pelo correspondente valor da tabela.

Em relação ao tempo e a precisão dos resultados, qual foi o método mais eficaz?

a) 8192 x 1048576 = b) 8589934592 **:** 64 =

Comentário: Viana (2024), testando a atividade em turmas de ensino médio e discutindo-a com professoras (uma das professoras aplicou a atividade em suas turmas) em roda de conversa, atesta que antes da sua aplicação pode ser necessário relembrar a representação genérica dos elementos da potenciação.

Noção intuitiva de sua definição:

Entre os séculos XV e XVII, no continente Europeu, intensificaram-se as construções de tabelas contendo números denominados *logaritmos*, que ocupariam no século seguinte a posição dos atuais expoentes.

Hoje, intuitivamente, podemos dizer que **logaritmos** são **expoentes** relativos à uma **base previamente determinada**. Portanto, a tabela fornecida na atividade anterior contém **logaritmos de base 2**. Veja, ao lado, como representá-la a partir do conceito intuitivo de **logaritmo.**

Resultados das potenciações	Logaritmos de base 2
32	6
8192	13
1048576	20
134217728	27
8589934592	33
54975581388	39

Atividade 3: Complete o quadro abaixo com as potências correspondentes a tabela de logaritmos de base 2, conforme a primeira conversão exemplificada:

x	$\log_2 x$
16384	14
524288	19
16777216	24
536870912	29
17179869184	34
274877906944	38

16384 = 2^{14}
524288 =
16777216 =
536870912 =
17179869184 =
274877906944 =

Comentário: Estudos realizados (Galupo, 2021; Pereira; Resende, 2021) com turmas que já haviam estudado logaritmos indicam que a percepção do conceito de logaritmo como expoente não costuma acontecer.

Atividade 4: Observe, inicialmente, o mecanismo de construção da tabela que está na próxima página e, só após, conclua a atividade calculando o que se pede:

1º) Para obter a coluna da esquerda fomos duplicando os valores anteriores, a partir do primeiro.

2º) Para obter os valores da coluna da direita fomos simplesmente adicionando uma unidade aos seus anteriores, a partir do inicial.

x	$\log_2 x$
1	0
2	1
4	2
8	3
16	4
32	5
64	6
128	7
256	8
512	9
1024	10

2048	11
4096	12
8192	13
16384	14
32768	15
65536	16
131072	17
262144	18
524288	19
1048576	20
2097152	21
4194304	22
8388608	23
16777216	24
....	....

Obs: A palavra sequência implica em ordenação de objetos quaisquer, daí:

1ª) A coluna da esquerda contém um tipo de sequência numérica denominado *progressão geométrica* (P.G.).
2ª) A coluna da direita contém outro tipo de sequência numérica denominado *progressão aritmética* (P.A.).

Foi da comparação e correspondência entre estes dois tipos de sequência que surgiu o estudo dos logaritmos!

→→ Agora, com o auxílio das três etapas descritas logo a seguir, converta em potências **apenas 4 linhas da tabela**, aquelas que sejam necessárias, e conclua a atividade calculando as operações solicitadas:

1ª) Substitua cada número envolvido nas operações pela potência equivalente;

2ª) Logo após, no item “a” aplique a propriedade $(a^x)^y = a^{x.y}$;

no item “b” utilize a propriedade $\sqrt[y]{a^x} = a^{x:y}$;

3ª) Por fim, substitua a potência resultante pelo correspondente valor da tabela.

a) $(16)^6 =$

b) $\sqrt[3]{2097152} =$

Em relação ao tempo e à precisão dos resultados obtidos, excetuando-se o uso da calculadora, você conhece outro método mais simples do que este?

Comentário: Viana (2024), através de estudos de revisão de literatura e de sua discussão em roda de conversa com professoras de ensino médio (uma das professoras aplicou a atividade em suas turmas), demonstra que a associação de sequências numéricas à introdução do conceito de logaritmo torna sua compreensão mais intuitiva.

Noção intuitiva de sua popularidade original – 1º fator:

Partindo de uma tabela de logaritmos, perceba que os procedimentos das **atividades 2 e 4,** em nova linguagem, correspondem às **propriedades de logaritmos.**

1ª propriedade: Observe que para obter o resultado de (16384) x (4194304), basta **adicionar os logaritmos dos fatores** e teremos o **logaritmo do produto** (que é o resultado da multiplicação anterior):

x	512	16384	262144	4194304	13421772	68719476736
$\log_2 x$	9	14	18	22	27	36

14 + 22 = 36 Resposta = 68719476736

2ª propriedade: Agora, veja que para obter o resultado de (13421772) **:** (512), basta **subtrair ordenadamente seus logaritmos** e teremos o **logaritmo do quociente** (que é o resultado da divisão anterior).

x	512	16384	262144	4194304	13421772	68719476736
$\log_2 x$	9	14	18	22	27	36

27 – 9 = 18 Resposta = 262144

3ª propriedade: Perceba também que para obter o resultado de $(512)^4$, basta **multiplicar o expoente pelo logaritmo da base** e teremos o **logaritmo da potência** (que é o resultado da potenciação anterior).

x	512	16384	262144	4194304	13421772	68719476736
$\log_2 x$	9	14	18	22	27	36

4 x 9 = 36 Resposta = 68719476736

4ª propriedade: E, por fim, se quisermos o resultado de ($\sqrt[2]{68719476736}$), basta **dividir o logaritmo do radicando pelo índice** e teremos o **logaritmo da raiz** (que é o resultado da radiciação anterior):

x	512	16384	262144	4194304	13421772	68719476736
$\log_2 x$	9	14	18	22	27	36

Resposta = 262144 36 **:** 2 = 18

Atividade 5: Com o auxílio da **tabela** e das **propriedades dos logaritmos,** anote o tempo que levará para encontrar os resultados abaixo solicitados**.**

x	256	8192	32768	16777216	137438953472	49755813888
$\log_2 x$	8	13	15	24	37	39

Depois, compare esse tempo com o que investiu na atividade 2. Qual o método mais rápido?

a) (32768) x (16777216) =

c) $(256)^3$ =

b) (137438953472) **:** (8192) =

d) $\sqrt[3]{49755813888}$ =

Comentário: Na pesquisa de Oliveira Junior (2020), o autor sugere que o contato com propriedades operatórias antes de formalizar o conceito de logaritmo torna sua introdução mais intuitiva.

Atividade 6: Faça uma breve busca na internet ou em livros sobre a origem histórica dos logaritmos e escreva um parágrafo que responda as seguintes reflexões:

a) Foi uma invenção individual ou consequência de uma busca coletiva?
b) Sua invenção foi consequência de genialidade ou de esforço?
c) Qual o significado científico e social do seu surgimento?

Comentário: Viana (2024), discutindo essa atividade com professoras de ensino médio (uma das professoras aplicou a atividade em suas turmas) em roda de conversa, mostra que um roteiro de busca sobre a História dos logaritmos é necessário e, quando aplicado após as atividades anteriores, torna o processo de aprendizagem mais eficaz.

Noção intuitiva de sua popularidade original – 2º fator:

Após o surgimento dos logaritmos percebeu-se que, se fossem concebidos relativamente ao que chamamos hoje **base 10**, eles seriam também úteis em outras áreas do conhecimento além da Astronomia e da Navegação. Mas, por que razão?

Porque **números que diferem pela posição da vírgula** tem logaritmos diferentes apenas na parte inteira, denominada **característica**, sendo iguais na decimal, denominada **mantissa**. Veja:

1 = 10^0
2 = $10^{0,301}$
3 = $10^{0,477}$
4 = $10^{0,602}$
5 = $10^{0,699}$
6 = $10^{0,778}$
7 = $10^{0,845}$
8 = $10^{0,903}$
9 = $10^{0,954}$
10 = 10^1
11 = $10^{1,041}$
...

Ex$_1$:

x	$\log_2 x$
2	0,301
20	1,301
200	2,301
2000	3,301

Característica= 0; mantissa= 301
Característica= 1; mantissa= 301
Característica= 2; mantissa= 301
Característica= 3; mantissa= 301

Um modo de reconhecer a característica do logaritmo de certo número “N” é representá-lo em **notação científica**, isto é, pelo produto de um número “a”, situado entre 1 e 10, por uma potência de 10, ou, **N = a.**$\mathbf{10}^{c}$.

Desse modo, o número “**c**” será a **característica** do **logaritmo do número N**.

Já a **mantissa** é **tabelada**! Porém, do latim, a palavra mantissa significa “adição” ou “contrapeso”, então, deve ser **adicionada** ao valor da **característica**.

Ex$_2$: Dada a mantissa do logaritmo de 778, igual a 891, represente tanto 77800 quanto 0,0778 como potências de base 10:

a) Como 77800 = 7,78.10^4 a característica vale 4, então, o logaritmo decimal de 77800 será 4 + 0,891 = 4,891. Consequentemente: 77800 = $10^{4,891}$.

b) Como 0,0778 = 7,78.10^{-2} a característica vale –2, então, o logaritmo decimal de 0,0778 será –2 + 0,891 = –1,109. Por consequência: 0,0778 = $10^{-1,109}$.

Atividade 7: Observe a tabela de potências e complete a de logaritmos:

$1 = 10^{0}$
$2 = 10^{0,301}$
$3 = 10^{0,477}$
$4 = 10^{0,602}$
$5 = 10^{0,699}$
$6 = 10^{0,778}$
$7 = 10^{0,845}$
$8 = 10^{0,903}$
$9 = 10^{0,954}$

x	Notação científica de x	$\log_{10} x$
60		
400000		
3000		
0,05		
0,000007		
0,0009		

Comentário: Viana (2024), testando esta atividade em turmas de ensino médio e discutindo-a com professoras (uma das professoras aplicou a atividade em suas turmas) em roda de conversa, constata que os conceitos de *característica* e *mantissa* podem auxiliar a fixar o conceito de logaritmo como expoente, desde que haja um acompanhamento prévio em relação ao uso da notação científica.

4. Referências

ALVES, A. M. M.; LOPES, L. S. A abordagem da História da Matemática em livros didáticos: Análise de um livro texto. In: FONSECA, M. S.; FERREIRA, A. L. A.; ALVES, A. M. M.; SILVEIRA, D. N.; LORETO, A. B. (Org.) **Matemáticas:** Educação e Pesquisa. Pelotas: Ed. Da Universidade Federal de Pelotas, 2014.

ÁVILA, G. Como se constrói uma tábua de logaritmos. **Revista do Professor de Matemática - RPM**, Rio de Janeiro (RJ) – n.26, pp.1 a 3, SBM, 1994.

BLANCHÉ, R. **A axiomática.** São Paulo: Martins Fontes,1978.

BOYER, C. B. **História da Matemática.** São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BOYER, C. B. **Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula; v.6.** São Paulo: Atual, 1992.

CARVALHO, J. B. P. Euclides Roxo e as polêmicas sobre a modernização do ensino da matemática. In: VALENTE, V. R. (Org.) **Euclides Roxo e a modernização do ensino da matemática no Brasil.** Brasília: Editora Universidade de Brasília, 2004.

CONTADOR, P. R. M. **Matemática**, uma breve história; v.2. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2006.

COSTA, A. B.; OLIVEIRA, R. F. S.; LOPES, T. B. Dos logaritmos de Napier à mais bela de todas as fórmulas. **BOCEHM**, Fortaleza (CE) – v.4, n.12, p. 26 – 40, dez. 2017.

COSTA, C.; TRALES, P. **Argumentação e conceito de prova em matemática.** Rio de Janeiro: UFF/CEP, 2006.

COTRIM, G.; FERNANDES, M. **Fundamentos de Filosofia.** São Paulo: Saraiva, 2013.

DAVIS, H. T. **Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula.** v. 2**,** São Paulo: Atual, 1992.

EVES, H. **Introdução à história da matemática.** Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.

EVES, H. **Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula; v.3.** São Paulo: Atual, 1992.

GALUPO, A. S. **A construção do conceito de logaritmo**. 2021. Dissertação (Mestrado Profissional), Universidade Federal da Fronteira Sul, Chapecó – SC.102p.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; PÉRIGO, R.; ALMEIDA, N. **Matemática – Ciências e Aplicações v.1.** São Paulo: Atual, 2004.

MIORIM, M. Â. **Introdução à História da Educação Matemática.** São Paulo: Atual, 1998.

MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. **Os logaritmos na cultura escolar brasileira.** Natal: SBHMat, 2002.

MONICO, J. F. G. **Introdução a Geodésica**: perspectiva atual. FCT/UNESP, São Paulo, 2018. Disponível em: http://www2.fct.unesp.br/docentes/carto/galera/FGL/Geod_Definicao.pdf. Acesso em: 16 mai. 2020.

NAUX, C. **Histoire des logarithmes**: de Neper à Euler. Tome I. Paris: Libraire Scientifique et Technique A. Blanchard, 1966.

OLIVEIRA, A. T. P. **Minimanual compacto de literatura portuguesa:** teoria e prática. São Paulo: Rideel, 2003.

OLIVEIRA JUNIOR, R. L. Q. Uma introdução didática aos logaritmos de napier a partir de sua origem histórica. **Cadernos de Educação básica**, v.5, n.2, p.150-169, 2020.

PEREIRA, D. G.; RESENDE, M. R. **Ensino de Logaritmos**: um Diagnóstico da Apropriação do Conceito Discutido à Luz da Teoria Histórico-Cultural. Perspectivas da Educação Matemática, Mato Grosso do Sul, v. 14, n. 34, p. 1-21, 2021.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas.** Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

SANTOS, M. D. P. O ideal de ciência na modernidade: Bacon e Descartes. **Investigação Filosófica.** Macapá, v.1, n.10, p.63-73, 2019.

SCHUBRING, G. **Análise histórica de livros de Matemática:** notas de sala de aula. Campinas, SP: Aurores Associados, 2003.

SERRASQUEIRO, J. A. **Tratado de álgebra elementar.** 7.ed. Coimbra: Livraria central de J. Diogo Pires, 1900.

SOARES, E. C. **Uma investigação histórica sobre os logaritmos com sugestões didáticas para a sala de aula.** 2011. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática), Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal – RN, 142p.

SOARES, L. J. **Sobre o ensino da matemática.** Pelotas: EDUCAT, 1998.

SOUZA, J. C. M. **Dicionário Curioso e Recreativo da Matemática.** Rio de Janeiro: Ed. Getúlio Costa, 1942.

STRUIK, D. J. Por que estudar história da matemática? In: GAMA, R. (Org.) **História da Técnica e da Tecnologia.** São Paulo: EDUSP, 1985.

TAHAN, M. **A lógica na Matemática.** São Paulo: Saraiva, 1966.

VALENTE, V. R. **Uma história da matemática escolar no brasil.** São Paulo: Annablume: FAPESP, 1999.

VIANA, A. R. K. **Uma abordagem histórico-epistemológica para a introdução do conceito de logaritmo a partir da percepção de professoras de Matemática do Ensino Médio.** 2024. Dissertação (Mestrado em Ciências e Tecnologias na Educação), Instituto Federal Sul-rio-grandense de Educação, Ciência e Tecnologia, Câmpus Pelotas – Visconde da Graça, Pelotas - RS, 151p.

VIANNA, J. J. L. **Elementos de Arithmética.** 6.ed. Rio de Janeiro: Clássica de Alves, 1897.

Apêndices

Apêndice 1 - Um esboço sociocultural do contexto europeu

UM ESBOÇO SOCIOCULTURAL DO CONTEXTO EUROPEU

O interesse por estudos relacionados a construção de tábuas numéricas que auxiliassem as necessidades prementes da Astronomia, intensifica-se na Europa num período que a História convencionou chamar Idade Moderna - meados do século XV ao século XVIII -, ao longo da qual outras tantas descobertas matemáticas ocorreram, influenciadas, certamente, não apenas por inspirações matemáticas, mas também por transformações favoráveis nos campos político, econômico, social, religioso e artístico (Struik, 1985).

Nesses séculos, naquela região, houve a formação dos primeiros Estados nacionais modernos absolutistas, com a centralização do poder político pela figura dos reis, atendendo aos interesses da burguesia que precisava de um poder centralizador para garantir as condições de mercado. Constituiu-se assim o Mercantilismo, conjunto de práticas econômicas, que significou a transição gradual do Feudalismo para o Capitalismo, uma vez que o florescimento do comércio promovendo as grandes rotas comerciais através da expansão comercial-marítima possibilitou a chegada dos europeus à América e sua colonização (Cotrim; Fernandes, 2013).

No século XIV, os avanços na Matemática foram quase imperceptíveis. No entanto, do século XV em diante a renovação foi intensa (Eves, 1992). As transformações sociais, nesse período, receberam significativas contribuições culturais denominadas, em seu conjunto, Renascimento. Este movimento, que envolveu artistas e intelectuais de diversas áreas, foi inspirado no humanismo, que surge na península itálica em meados do século XIV, concebido por defensores do reavivamento da cultura greco-romana, bem como de certos ideais de exaltação do ser humano, tais como a razão e a liberdade. (Cotrim; Fernandes, 2013).

> O século XV, período inicial do Renascimento, testemunhou o reaparecimento da arte e do saber na Europa. Com o colapso do Império Bizantino, culminando com a queda de Constantinopla perante os turcos em 1453, refugiados afluíram a Itália, trazendo tesouros da civilização grega. Muitos clássicos gregos, conhecidos até então apenas através de traduções árabes que muitas vezes não eram boas, podiam agora ser estudados nas fontes originais. Também a invenção da imprensa com tipos móveis, por volta de meados do século,

> revolucionou o comércio de livros e permitiu que o conhecimento se difundisse numa velocidade sem precedentes (Eves, 1992, p.14).

A Reforma Protestante (1517) fragmentou a unidade religiosa europeia, procurando romper com a mentalidade conservadora do ser humano em relação aos desígnios divinos, ao reconhecer no trabalho uma fonte concreta de prosperidade e felicidade, além de passar a compreender a razão humana como uma extensão do poder divino, que permitia ao indivíduo certa liberdade e autonomia de pensamento. Dessa forma, a visão teocêntrica, predominante até então, gradualmente foi cedendo lugar à tendência antropocêntrica, mas não sem muitos conflitos (Cotrim; Fernandes, 2013).

A Igreja católica exerceu forte resistência ao Protestantismo, rechaçando-o através da Contra-Reforma, em 1540, monopolizando a educação para difundir a volta da fé irrestrita na autoridade da Igreja e fortalecendo o tribunal da Inquisição, a fim de reprimir manifestações contrárias (Oliveira, 2003).

Acrescente-se que no século XVII, embora economicamente dominante, a burguesia ainda era politicamente subordinada. Assim, o home deste período foi marcado pela tensão destas dualidades, das lutas de classes sociais e de crises religiosas, donde originou-se a Arte Barroca, como expressão dessa realidade (Oliveira, 2003).

Portanto, destacam-se como características fundamentais desse período histórico: o surgimento do *racionalismo*, que ao critério exclusivo da fé e da revelação opôs a razão e a capacidade de livre exame do mundo, inclusive de textos bíblicos; o *saber ativo*, em oposição ao saber contemplativo, buscando o conhecimento não apenas com base em princípios, mas na exploração do mundo real por intermédio de experimentações; e a *busca do método* adequado para investigar a realidade, como principal foco dos filósofos, marcando a cisão gradual da ciência com a filosofia aristotélico-escolástica, a fim de desbravar aos poucos seu próprio caminho (Aranha; Martins, 2009).

Santos (2019), esclarece que embora a influência aristotélico-escolástica ainda perdurasse nas artes mecânicas, marítimas e intelectuais no início do século XVII, dois filósofos, entre outros, exerceram papel decisivo em oposição à esta influência, por caminhos distintos, porém, com um ideal de modernidade em comum, perceptível através “do uso da natureza, da técnica, da importância de Deus e das escrituras para enfatizar como a possibilidade do progresso estava em concordância com o que o Criador permitia ao homem" (Santos, 2019, p.63): Bacon e Descartes.

Ambos buscaram fundamentar a ciência com um método seguro, isento de erros, que eram muito comuns na época. Um deles, Francis Bacon (1561-1626), um empirista inglês, defendeu o clássico método experimental como sendo *o método científico*, que consiste em quatro etapas: observação, hipótese, experiência e generalização, isto é, a elaboração de lei ou teoria (Aranha; Martins, 2009, p.374-378). Argumentava sobre a inovação, o rigor e a repetição das experiências em circunstâncias distintas

> Deve-se buscar não apenas uma quantidade muito maior de experimentos, como também de gênero diferente dos que até agora nos têm ocupado. Mas é necessário, ainda, introduzir-se um método completamente novo, uma ordem diferente e um novo processo, para continuar e promover a experiência. (Bacon, 1999, p. 79)

O outro, René Descartes (1596-1650), um racionalista francês que tinha por base a dúvida metódica, e, justamente por isso, seu método partia de quatro princípios lógicos, que se atendidos com rigor resultariam num conhecimento consistente

> O primeiro era o de jamais acolher alguma coisa como verdadeira que eu não conhecesse evidentemente como tal; isto é, de evitar cuidadosamente a precipitação e a prevenção, e de nada incluir em meus juízos que não se apresentasse tão clara e tão distintamente a meu espírito, que eu não tivesse nenhuma ocasião de pô-lo em dúvida. O segundo, o de dividir cada uma das dificuldades que eu examinasse em tantas parcelas quantas possíveis e quantas necessárias fossem para melhor resolvê-las. O terceiro, o de conduzir por ordem meus pensamentos, começando pelos objetos mais simples e mais fáceis de conhecer, para subir, pouco a pouco, como por degraus, até o conhecimento dos mais compostos, e supondo mesmo uma ordem entre os que não se precedem naturalmente uns aos outros. E o último, o de fazer em toda parte enumerações tão completas e revisões tão gerais, que eu tivesse a certeza de nada omitir" (Descartes, 1996, p. 78, 79).

Nesse contexto, a Matemática ganha certo status cultural, pois já era uma área desenvolvida na época e que, enquanto instrumento de abordagem da natureza, proporcionou significativos resultados aos filósofos que a adotaram, beneficiando-se do seu método lógico-dedutivo. Um dos precursores da Ciência moderna, Galileu Galilei (1564-1642), astrônomo e professor de Matemática da Universidade de Pisa, explicaria o mundo concreto, sensível, através de relações matemáticas, geométricas, procedimento incomum até o momento (Cotrim; Fernandes, 2013).

> Igualmente decisivo tem sido o papel da matemática no processo de mecanização do quadro do mundo, durante o século XVII. Para Galileu, o livro da natureza foi escrito em caracteres matemáticos – as letras são triângulos, círculos e outras figuras geométricas – e pode ser decifrado somente por aqueles que conhecessem a Matemática. Na filosofia de Descartes, a natureza tem que ser explicada em termos de Mecânica, e a Mecânica em termos de Matemática, de tal maneira que o conhecimento desta ciência seja a chave para a compreensão do universo físico (Struik, 1985, p.205).

Culturalmente, a Matemática, de ferramenta de professores de escola, de agrimensores, pilotos, cartógrafos e astrônomos, como era a do século XVI, passa a ser a *rainha das ciências*, permeando inclusive as artes. Spinoza escreveu sua *Ética* a maneira axiomática de Euclides (Struik, 1985).

> Basta voltar o pensamento para pintores como os italianos quatrocentistas e Albert Dürer para compreender que tem havido períodos de conexão intima entre a Matemática e as Artes. Nas escolas desses homens a perspectiva foi desenvolvida e as harmonias sentidas na pintura e na arquitetura foram combinadas na contemplação dos poliedros platônicos ou regulares e suas relações com a chamada secção áurea. Ela preocupou a mente humana desde a antiguidade até o Renascimento, quando Lucca Pacciolli escreveu um livro intitulado *Divina Proportione* (1509) com ilustrações muitas vezes atribuídas à Leonardo da Vinci (Struik, 1985).

Os Elementos era o modelo para pensadores que buscavam um ideal cartesiano de julgamentos claros e distintos. Entretanto, “essa maneira transcendental de encarar a Matemática, de algum modo perdeu-se na atmosfera mais tranquila do Iluminismo” (Struik, 1985).

Em síntese, esse ambiente vivenciado na Europa dos séculos XV, XVI e XVII, decorrente de profundas e graduais mudanças no *Zeitgeist* daquele período, constituiu-se no contexto favorável ao surgimento dos logaritmos, pois oportunizou certos aprimoramentos em determinadas áreas dos conhecimentos filosóficos e matemáticos naquela região, correspondentes ao que mais tarde, no século XVIII, seria denominado Ciência (Cotrim; Fernandes, 2013).

Referências

ARANHA, M. L. A.; MARTINS, M. H. P. **Filosofando:** Introdução à Filosofia. São Paulo: Moderna, 2009.

BACON, Francis (1620). **Novum Organum**. Trad. José Aluysio Reis de Andrade. São Paulo: Editora Nova Cultural, 1999.

COTRIM, G.; FERNANDES, M. **Fundamentos de Filosofia.** São Paulo: Saraiva, 2013.

DESCARTES, René (1637). **Discurso do Método**. Trad. J. Guinsburg e Bento Prado Junior. São Paulo: Editora Nova Cultural, 1996.

EVES, H. **Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula; v.3.** São Paulo: Atual, 1992.

OLIVEIRA, A. T. P. **Minimanual compacto de literatura portuguesa:** teoria e prática. São Paulo: Rideel, 2003.

SANTOS, M. D. P. O ideal de ciência na modernidade: Bacon e Descartes. **Investigação Filosófica.** Macapá, v.1, n.10, p.63-73, 2019.

STRUIK, D. J. Por que estudar história da matemática? In: GAMA, R. (Org.) **História da Técnica e da Tecnologia.** São Paulo: EDUSP, 1985.

Apêndice 2 - Uma distinção entre logaritmos Neperianos e Naturais

UMA DISTINÇÃO ENTRE LOGARITMOS NEPERIANOS E NATURAIS

Inicialmente, caracterizar-se-á o contraste, segundo Contador (2006), entre o número usado por Napier, correspondente ao que atualmente denomina-se base, e o número de Euler (base dos logaritmos naturais). Logo após, será feita uma conjectura sobre a possível razão do polêmico equívoco.

Se Napier não tivesse tido a intenção de evitar frações através do fator 10^7 antecedendo o parêntese na expressão $10000000.\left(1-\frac{1}{10000000}\right)^n$ teríamos, em algum momento:

$$\log_{\left(1-\frac{1}{10^7}\right)} \left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{10^7} = 10^7$$

que é um número muito grande e, no caso, quando n tende ao infinito a potência $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ tende ao número $\frac{1}{e}$, que caracteriza o *logaritmo neperiano*. Já o número e, por definição, corresponde ao limite para o qual tende a expressão $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ quando n tende ao infinito. Isto é, na medida em que n for crescendo, as frações $\left(1-\frac{1}{n}\right)$ e $\left(1+\frac{1}{n}\right)$ tendem a tornar-se números inversos. Observe que os *logaritmos Neperianos* são decrescentes, ao passo que os *logaritmos naturais* são crescentes.

É plausível que o equívoco decorra, historicamente, do apêndice de uma tradução do trabalho original de Napier do latim para o inglês, em 1616 ou 1618, contendo uma tábua de logaritmos naturais, sem vírgula decimal, que fornece para o logaritmo de 10 o valor 2,302584. Ocorre, porém, que a tábua citada não era de Napier, mas provavelmente de William Oughtred, mais tarde ampliada por John Speidell, em 1662, com logaritmos do tipo $10^6.(\ln x)$, com aproximação de seis casas decimais. Já os *neperianos* utilizavam sete casas decimais (Davis, 1992).

Referências

CONTADOR, P. R. M. **Matemática**, uma breve história; v.2. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2006.

DAVIS, H. T. **Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula; v.2.** São Paulo: Atual, 1992.

Apêndice 3 - Um método antigo para o cálculo de logaritmos decimais

UM MÉTODO ANTIGO PARA O CÁLCULO DE LOGARITMOS DECIMAIS

Inicialmente, apresentaremos uma visão mais panorâmica do cálculo de logaritmos decimais realizado por Briggs, segundo Ávila (1994). Sabendo que qualquer número pode ser escrito como o produto de um número entre 1 e 10 por uma potência de 10, bastaria conhecer os logaritmos de número entre 1 e 10 para determinar o logaritmo de qualquer número. Esses foram denominados *mantissas*.

Briggs começou extraindo a raiz quadrada de 10, e também do resultado, bem como dos resultados sucessivos de cada extração seguinte. Realizou esse processo por 54 vezes. Desse modo, obteve os logaritmos de vários números.

Então, foi aumentando a tabela utilizando os resultados já obtidos e a propriedade fundamental: log (a.b) = log a + log b, veja

log ($10^{1:2}$ x $10^{1:4}$) = log ($10^{1:2}$) + log ($10^{1:4}$)

log (3,16228 x 1,77828) = 0,5 + 0,25 = 0,75

Observe que o conhecimento dos logaritmos de "a" e "b" permite calcular o logaritmo de $\sqrt{a.b}$ pela propriedade correspondente (Ávila, 1994).

A seguir, examinaremos em pormenores o antigo método utilizado por Briggs, comum aos calculistas até então, através de uma pequena tábua, tanto com poucos valores quanto com uma quantidade reduzida de casas decimais.

O Método da raiz: (Adaptado de Eves, 2004)

Extraindo-se a raiz quadrada de 10, depois a raiz quadrada desse primeiro resultado, depois a raiz desse segundo resultado e assim por diante, pode-se construir a seguinte tábua, que contém apenas 18 das 54 extrações realizadas por Briggs.

$10^{1/2} = 3{,}16228$	$10^{1/128} = 1{,}01815$	$10^{1/8192} = 1{,}00028$
$10^{1/4} = 1{,}77828$	$10^{1/256} = 1{,}00904$	$10^{1/16384} = 1{,}00014$
$10^{1/8} = 1{,}33352$	$10^{1/512} = 1{,}00451$	$10^{1/32768} = 1{,}00007$
$10^{1/16} = 1{,}15478$	$10^{1/1024} = 1{,}00225$	$10^{1/65536} = 1{,}00004$
$10^{1/32} = 1{,}07461$	$10^{1/2048} = 1{,}00112$	$10^{1/131072} = 1{,}00002$
$10^{1/64} = 1{,}03663$	$10^{1/4096} = 1{,}00056$	$10^{1/262144} = 1{,}00001$

(Tabela adaptada de Eves 2004, p. 367)

1º) Seja N um número entre 1 e 10.

Suponha que queiramos calcular log N com 3 casas decimais.

Ex: N= 4,6 portanto, queremos descobrir $\log_{10}(4{,}6)$ com 3 casas decimais.

2º) Divide-se N pelo maior resultado da tabela, que não exceda N, para obter como quociente um número N_1.

Da divisão (4,6):(3,16228) = 1,45464... ≅ 1,4546 resultará nosso N_1.

OBs: Pede-se resultado com 3 casas decimais. Então, trabalharemos com 4 casas decimais para termos 3 algarismos certos e um duvidoso, o arredondado.

3º) Suponha que o divisor seja o número correspondente a $10^{1/P_1}$. Então $\frac{1}{P_1}$ será a primeira parcela do logaritmo a ser calculado.

Como o divisor foi 3,16228 então a primeira parcela do logaritmo será $\frac{1}{2}$

4º) Repetindo-se o mesmo raciocínio para N_1 e sucessivamente para N_2 , N_3 ,..., N_n até que N_n difira da unidade na quarta casa decimal, ou seja, quando obtivermos N_n=1,000y... onde y≠0, então, poderemos interromper o processo.

$N_1 = 1{,}4546$ → o divisor será 1,33352 e a segunda parcela do logaritmo $\frac{1}{8}$

Da divisão (1,4546):(1,33352) = 1,09079... ≅ 1,0908 resultará nosso N_2.

$N_2 = 1{,}0908$ → o divisor será 1,07461 e a terceira parcela do logaritmo $\frac{1}{32}$

Da divisão (1,0908):(1,07461) = 1,01506... ≅ 1,0151 resultará nosso N_3.

$N_3 = 1{,}0151$ → o divisor será 1,00904 e a quarta parcela do logaritmo $\frac{1}{256}$

Da divisão (1,0151):(1,00904) = 1,00600... ≅ 1,006 resultará nosso N_4.

$N_4 = 1{,}006$ → o divisor será 1,00451 e a quinta parcela do logaritmo $\frac{1}{512}$

Da divisão (1,006):(1,00451) = 1,00148... ≅ 1,0015 resultará nosso N_5.

$N_5 = 1{,}0015$ → o divisor será 1,00112 e a sexta parcela do logaritmo $\frac{1}{2048}$

Da divisão (1,0015):(1,00112) = 1,00037... ≅ 1,0004 resultará nosso N_6.

5º) Como N_6 difere da unidade na 4ª casa decimal, interrompemos o processo e o valor do logaritmo já pode ser obtido satisfatoriamente, basta fazer:

$$\log_{10}(N) = \frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2} + \frac{1}{P_3} + \cdots + \frac{1}{P_n}$$

ou

$$\log_{10}(4{,}6) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{256} + \frac{1}{512} + \frac{1}{2048} = 0{,}6625\ldots \cong 0{,}663$$

Note o(a) colega que esta fórmula final nada mais é do que a aplicação da propriedade do logaritmo do produto sendo transformado em adição, aplicado a fatoração do número N inicial, veja:

$$N = 10^{1/P_1}.\,10^{1/P_2}.\,10^{1/P_3}\ldots\,10^{1/P_n}$$

OBs: O resultado corresponderá ao valor obtido diretamente na calculadora, porém, já arredondado para o número de casas solicitado.

Referências

ÁVILA, G. Como se constrói uma tábua de logaritmos. **Revista do Professor de Matemática - RPM.** Rio de Janeiro, n. 26, p. 1-3, 1994.

EVES, H. **Introdução à história da matemática.** Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.

Apêndice 4 - Escolarização da Matemática e as definições de logaritmo

ESCOLARIZAÇÃO DA MATEMÁTICA E AS DEFINIÇÕES DE LOGARITMO

A criação da Escola Politécnica de Paris, uma nova Escola de Engenharia, foi uma conquista da classe média que produziu suas próprias instituições de saber através da Revolução Francesa. Esta, foi influenciada, entre outros fatores, pela publicação da Enciclopédia de Denis Diderot, obra constituída por 28 volumes (1713-1784) (Valente, 1999; Struik, 1985).

Cerca de vinte anos antes de publicá-la, Diderot convidou um grupo de eruditos franceses para que escrevessem artigos examinando todos os contextos dos novos ensinamentos de Newton (1642-1727). O filósofo e matemático D'Alembert (1717-1783) foi um dos primeiros colegas a lhe acompanharem, escrevendo partes fundamentais dos tomos iniciais (Schubring, 2003). No tomo V (1755), escreveu um exaustivo artigo intitulado *Elementos da Ciência*, influenciando significativamente o despertar das reformas educacionais efetivadas durante a Revolução (Schubring, 2003).

Neste artigo, manifesta seu profundo otimismo quanto à convergência entre o progresso científico e o progresso pedagógico. Em determinado momento, D'Alembert centraliza sua atenção nas definições e em sua função no interior das noções elementares da ciência. Discute como bons livros-textos deveriam ser escritos e examina a relação entre *facilidade de compreensão* e *rigor*, como um ponto fundamental na composição de livros elementares, enfatizando que jamais deveria haver contradição entre ambos (Schubring, 2003).

Nesse contexto, surge um *best seller* mundial que teve mais de 75 edições, desde a publicação em 1770 até 1868, com um expressivo número de edições em outros idiomas. Trata-se do livro *Aritmética*, escrito por Etienne Bézout, membro da Academia de Ciências da França. No início do século XIX foi traduzido para o inglês e adotado nas escolas norte-americanas. Nesta obra encontra-se uma definição de logaritmo já bem mais elementar em relação a definição de Napier, do século anterior (Valente, 1999):

> Logaritmos são números em Progressão Aritmética que correspondem, termo a termo, a uma sequência de números em Progressão Geométrica (Valente, 1999, p.86).

A obra de Bézout continha os germes para um ensino elementar e apresentava ainda os fundamentos de uma Ciência, tanto que no Brasil, por exemplo, viriam textos que buscariam novas alternativas na ordem desses conteúdos, e só aos poucos, eventualmente, algumas variações iriam ocorrer, como no caso da definição de logaritmo encontrada no livro de João José Luiz Vianna, cujos *Elementos de Aritmética* integraram os programas do Ginásio Nacional, tendo o Colégio Pedro II como referência (Valente, 1999):

> Logaritmos são números em progressão por diferenças, correspondendo termo a termo a outros números em progressão por quocientes; havendo sempre na progressão por diferenças um termo zero, que corresponda a um termo igual a um, na progressão por quocientes (Vianna, 1897, p. 231 *apud* Miorim; Miguel, 2002, p. 28).

Observa-se que nesta definição de logaritmos já há indício da busca por um certo *rigor lógico* que caracteriza uma teoria científica, mesmo durante o processo de escolarização da Matemática, pois o termo *rigor lógico* diz respeito a certa precisão nas definições, como ponto fundamental da teoria; porém, esse processo ocorre muito lentamente.

A inserção dos logaritmos entre os tópicos algébricos em nosso país, por exemplo, ocorre só após a Reforma da Educação Brasileira, de 1890, proposta por Benjamin Constant (Soares, 2011). Assim, vemos surgir outra obra bastante influente na escolarização matemática de nosso país e que foi referência no Ginásio Nacional (Colégio Pedro II) de 1891 a 1923. Trata-se da *Álgebra de Serrasqueiro*. O livro do Bacharel em Filosofia pela Universidade de Coimbra e professor de Matemática, José Adelino Serrasqueiro, apresenta nova definição para os logaritmos, agora sob o ponto de vista algébrico (Valente, 1999):

> **Logaritmo de um número** é o expoente da potência a que é necessário elevar uma quantidade positiva, chamada de base, para produzir esse número. Assim, sendo x = log y (base a) por definição teremos y = a^x. (Serrasqueiro, 1900, p. 325 *apud* Miorim; Miguel, 2002, p. 97).

O primeiro período do desenvolvimento da Matemática escolar em nosso país, denominado *clássico ou tradicional*, transcorreu de 1730 a 1930.

Até 1929, o ensino e os exames de Aritmética, Álgebra e Geometria eram feitos separadamente. Nessa época, porém, um decreto que dizia respeito apenas ao Colégio Pedro II, autorizou a introdução das ideias modernizadoras do ensino da Matemática em nosso país e, com elas, ocorreu a unificação desses três ramos das Matemáticas numa única componente curricular denominada Matemática (Miorim, 1998).

Essas ideias modernizadoras – Primeiro Movimento Internacional para a Modernização do Ensino da Matemática – influenciaram o segundo período da Matemática escolar brasileira, o período da *escola nova*, que iria de 1930 até 1971; e surgiram por consequência do rápido desenvolvimento da Matemática durante o século XIX, que nas últimas décadas originou uma imensa estrutura dividida em vários ramos conhecidos apenas por especialistas. Assim, surgiram tanto as sociedades nacionais especializadas quanto os periódicos e encontros internacionais (Miorim, 1998).

O objetivo fundamental desse Movimento era diminuir o descompasso entre o ensino secundário e o universitário, defendendo um ensino que partisse da intuição e que só aos poucos apresentasse o raciocínio lógico, priorizando a descoberta e não a memorização. Propunha também a introdução do conceito de função no nível secundário, o elemento unificador dos diferentes conteúdos; porém, em geral, isso ficou relegado apenas aos capítulos finais da última série (Miorim, 1998).

A próxima reforma educacional nacional, a Reforma Francisco Campos (1930), acataria para o ensino secundário as ideias modernizadoras introduzidas pelo Colégio Pedro II. Daí por diante, a definição de logaritmos passaria a ser estritamente algébrica. Portanto, os logaritmos foram estudados tanto no campo da Aritmética quanto no campo da Álgebra de 1891 a 1930, e, posteriormente, apenas em termos algébricos (Soares, 2011; Carvalho, 2004).

> Os logaritmos podem originar-se no cálculo dos valores, onde eles derivam de duas progressões, sendo uma geométrica e outra aritmética, ou na álgebra, onde eles são considerados como expoentes a que é necessário elevar uma certa base para obter todos os números possíveis (Alves, 1918, p. 339 *apud* Miorim; Miguel, 2002, p. 97).

O Primeiro Movimento Internacional para a Modernização do Ensino da Matemática foi a primeira tentativa organizada envolvendo vários países, mas o descompasso entre os avanços científicos e a Matemática ensinada nas escolas de nível secundário seria intensificado. Esse foi novamente um dos mais fortes argumentos utilizados pelos defensores de um segundo movimento que viria ocorrer mais tarde: o *Movimento da Matemática Moderna*, que marcou a terceira fase da Matemática escolar brasileira, a partir de 1971 (Miorim, 1998).

Por outro lado, as primeiras ideias modernizadoras não foram absorvidas de imediato. Diferentes compreensões podem ter levado alguns autores à certa flexibilização na conceituação, já que um dos objetivos era tornar o ensino mais intuitivo. Daí porque, encontramos em 1966 – *A Lógica na Matemática* – o matemático Melo e Souza (Malba Tahan) investigando, explicando e discutindo, sobre vários ângulos, conceitos e definições de outros autores; buscando estabelecer certos parâmetros para definições e sintetizando-os em *leis gerais*, que diziam respeito a noção de *rigor lógico*:

I) Lei da "reflexibilidade da definição":

A definição deve substituir rigorosamente o objeto definido.

II) Lei da "clareza da definição":

A definição deve ser mais clara do que o definido.

III) Lei da "autenticidade da definição":

O definido não deve entrar na definição.

IV) Lei da "concisão da definição":

A definição deve ser breve.

V) Lei da "legitimidade da definição":

Na definição só podem figurar conceitos simples, já conhecidos, ou conceitos admitidos sem definição.

VI) Lei do "conteúdo da definição":

A definição não deve ser deficiente nem superabundante.

VII) Lei da "determinação da definição":

A definição deve convir ao definido e só ao definido.

Assim, as *definições* constituem-se no principal componente da noção de *rigor lógico*, pois a partir delas é que se examina o *rigor* das demonstrações de *teoremas* em épocas distintas. Isto é, não se pode examinar o *rigor* matemático de um período histórico com critérios de *rigor* de um outro período qualquer.

A fim ilustrar em pormenores a noção de *rigor lógico*, vamos examiná-la em relação à definição de logaritmos atualmente difundida, alcançada somente após o Movimento da Matemática Moderna, que começou a materializar-se com a introdução de símbolos lógicos na década seguinte, através da LDB 5692, de 1971, a partir da qual a teoria dos conjuntos foi largamente utilizada nos livros didáticos e o estudo das funções passou a ocorrer desde as séries iniciais do ensino secundário, a fim de conectar os diferentes campos da Matemática.

Conceituemos definição e alguns de seus atributos:

Definir significa tanto enunciar a *compreensão* precisa de um *conceito*, quanto *delimitar* o ângulo de abordagem desse *conceito*.

I) A definição "visa, como o seu nome o sugere, *delimitar a compreensão* de uma ideia, mas também estabelecer uma *equivalência lógica* entre um novo termo e um conjunto de termos introduzidos anteriormente" (Blanché, 1987).

II) "De acordo com as normas aristotélicas, a *definição* deve conter as condições necessárias e suficientes para demonstrar todas as propriedades do objeto, da relação, ou do ser definido" (Tahan, 1966, p. 24).

Analisemos a atual definição:

$$\log_b(a) = x \leftrightarrow a = b^x \;/\; a \in (0, +\infty) \quad e \quad b \in (0, +\infty) - \{1\}$$

Perceba que essa *definição analítica* ilustra perfeitamente os atributos do item **I**, porque pela *equivalência* e pelo *campo de existência* de "a" e "b", *delimita a compreensão* da ideia traduzindo-a numa *exponenciação*, já conhecida.

Por outro lado, ilustra também os atributos do item **II**, porque através das *propriedades de potências* permite a demonstração de *extensões úteis desse conceito,* tais como suas *propriedades operatórias* e sua *mudança de base*.

Por conseguinte, o processo de escolarização da Matemática visou, ao longo do tempo, o desenvolvimento de definições cada vez mais elementares, no entanto, gradualmente, foi buscando um vínculo cada vez maior com o caráter científico. O atual estágio de definição dos logaritmos encontra-se, certamente, em um grau bastante satisfatório de conciliação entre o que é elementar e científico. No entanto, o rigor lógico necessário para se chegar nesta definição, pode gerar um formalismo excessivo para a compreensão, sobretudo para estudantes da educação básica, daí a perspectiva de nosso texto de apoio:

suavizar um pouco esse *rigor lógico* (que é seguido quase automaticamente) através de noções mais intuitivas, menos formais e mais contextualizadas historicamente.

Referências

BLANCHÉ, R. **A axiomática.** São Paulo: Martins Fontes,1978.

CARVALHO, J. B. P. Euclides Roxo e as polêmicas sobre a modernização do ensino da matemática. In: VALENTE, V. R. (Org.) **Euclides Roxo e a modernização do ensino da matemática no Brasil.** Brasília: Editora Universidade de Brasília, 2004.

MIORIM, M. Â. **Introdução à História da Educação Matemática.** São Paulo: Atual, 1998.

MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. **Os logaritmos na cultura escolar brasileira.** Natal: SBHMat, 2002.

SCHUBRING, G. **Análise histórica de livros de Matemática:** notas de sala de aula. Campinas, SP: Aurores Associados, 2003.

SOARES, E. C. **Uma investigação histórica sobre os logaritmos com sugestões didáticas para a sala de aula.** 2011. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática), Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal – RN, 142p.

STRUIK, D. J. Por que estudar história da matemática? In: GAMA, R. (Org.) **História da Técnica e da Tecnologia.** São Paulo: EDUSP, 1985.

TAHAN, M. **A lógica na Matemática.** São Paulo: Saraiva, 1966.

VALENTE, V. R. **Uma história da matemática escolar no brasil.** São Paulo: Annablume: FAPESP, 1999.